דוד פרייברט

חקירה של תמונות מצב גאומטריות בתהליך ספירלי של אינדוקצייה ודדוקצייה

תקציר

אינדוקצייה ודדוקצייה הן כלים מרכזיים בחקירה מדעית. במאמר זה מוצגת חקירה בתחום גאומטרי, המתארת תהליך ספירלי דו-כיווני של אינדוקצייה ודדוקצייה. במחקר:

התהליך האינדוקטיבי יוצא מתמונת-מצב של טרפז אקראי וממנה להשערה על קיום תכונה חדשה בטרפז.

התהליך הדדוקטיבי של הוכחת תכונה זו מוביל לתמונת-מצב אחרת: טרפז ומעגל אפולוניוס הקשור אליו. כאן בדרך האינדוקטיבית מתגלות השערות חדשות. הניסיון להוכיח אותן – מביא לתמונת-מצב כללית יותר של מרובע קמור ומעגל, העובר דרך נקודות-חיתוך של אלכסונים והמשכי שתי צלעות נגדיות של המרובע.

בתמונת-מצב זו מוכיחים את ההשערות הללו, אך בשלב זה – החקירה לא מסתיימת, כי לאחר הרחבת תמונת-המצב האחרונה לתמונת-מצב מורחבת יותר – החקירה עוברת לסיבוב אינדוקטיבי-דדוקטיבי נוסף של מציאת תכונות והוכחת תכונות של משיקים למעגל, הקשורות להשערות הקודמות.

מילות מפתח: *אינדוקצייה ודדוקצייה; תכונות טרפז; מרובע ומעגל; שימוש במשפט פסקל הכללי.*

מבוא

במובן הרחב – השלב האינדוקטיבי במחקר מתמטי הוא אמצעי להסיק מסקנות כלליות ממקרים פרטיים, דרך מעבר מעובדות אחדות, שיתגלו על-ידי התבוננות וניסויים בתמונת-מצב מתמטית מסוימת – להכללות, שמספקות מידע על תכונות חדשות, המתקיימות בתמונת-המצב הנחקרת. לכן חקירה אינדוקטיבית מכילה בין המרכיבים ההכרחיים שלה את שיטות-המחקר הבאות: התבוננות, ניסויים (מדידה, חישוב, בנייה נוספת ועוד) והכללה. אם חקירה אינדוקטיבית מיושמת במצבים שבהם מספר המקרים הפרטיים גדול מאוד או אינסופי, ולכן אין אפשרות לבדוק את נכונות המסקנות לכל המקרים, אז שיטת מחקר זו נקראת **אינדוקצייה לא-שלמה**. אינדוקצייה לא-שלמה היא **שיטה היוריסטית חשובה לגילוי השערות חדשות**, אך היא לא נותנת הוכחות של השערות שהתקבלו בעזרתה.

בהמשך החקירה – ההשערות הללו דורשות הוכחה (אם הן נכונות) או הפרכה (אם הן אינן נכונות). לשם כך משתמשים בשיטת הדדוקצייה. השלב הדדוקטיבי של חקירת תמונת-מצב מתמטית מסוימת כולל: (1) חיפוש הוכחה כלשהי של השערות, שקיבלנו בשלב האינדוקטיבי; (2) חיפוש הוכחות שונות של ההשערות הללו (אם קיים צורך בכך), ואז בחירה של ההוכחה המתאימה ביותר למטרות החוקר. בשלב של חיפוש הוכחות להשערות – מוכרחים פעמים רבות להרחיב, או אפילו לשנות, את תמונת-המצב המתמטית ההתחלתית. תמונת-המצב המתמטית החדשה מאפשרת לבצע שלב נוסף של חקירה אינדוקטיבית, שיניב השערות חדשות, ואז שוב עוברים לשלב ההוכחות (שלב של דדוקצייה), וחוזר חלילה.

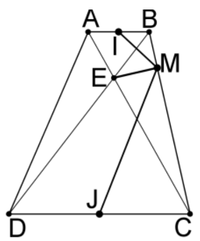
המאמר מיועד למורים ולסטודנטים-מורים למתמטיקה בעתיד, אשר מתעניינים בדרכי הפיתוח של מחקר גאומטרי, ורוצים להעמיק את הידע ביישום של מעגל אפולוניוס, במשפט פסקל כללי, בתכונות של קוטב ופולרה שלו ביחס למעגל ועוד (ראו את הגדרת המושג polar בהמשך המאמר).

החלק הראשון של המאמר, המדבר על טרפז ומעגל אפולוניוס – מיועד גם לתלמידים מתקדמים בבתי-הספר.

דוגמה של חקירה אינדוקטיבית-דדוקטיבית מעגלית דו-כיוונית

בתהליך חקירת תכונות של טרפז אקראי – התבוננתי בתמונת-המצב הגאומטרית שבאיור 1.

בתמונת-המצב מופיע טרפז אקראי $ABCD$ (AB||CD) ובו: האנך EM מנקודת-חיתוך-אלכסונים E לשוק BC והקטעים IM ו- JM, כאשר הנקודות I ו- J הן אמצעי הבסיסים AB ו- CD בהתאמה. מדידת קטעים וזוויות שונים שבאיור יחד עם חישוב נוסף – מביאים למסקנות הבאות:



איור 1

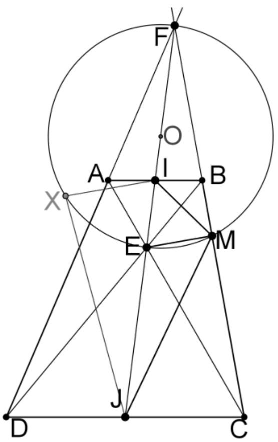
(1) **האנך EM לשוק הטרפז** (ל-BC באיור 1) **הוא חוצה-הזווית IMJ** ו-(2) **מתקיימת פרופורצייה** $\frac{MI}{MJ}=\frac{AB}{CD}$, שהן תכונות מיוחדות של הקטעים EM, IM ו- JM בטרפז אקראי $ABCD$. שינוי צורת הטרפז (למשל, בעזרת תָּכְנַת GeoGebra) מראה, שהתכונות (1)-(2) מתקיימות גם אז. ההוכחה הראשונה שמצאתי (לא נביא אותה כאן) – מתבססת על שימוש חוזר בדמיון משולשים ובתכונות מיוחדות של טרפז. ההוכחה נראתה די קשה, ולכן היא לא מתאימה להוראה לתלמידי-תיכון.

חיפוש נוסף אחר הוכחת התכונות (1) ו-(2) מביא לרעיון להיעזר בהוכחה במעגל אפולוניוס. הסיבה לכך היא העובדה, *שמעגל אפולוניוס הוא מקום גאומטרי של כל הנקודות, אשר יחס המרחקים מהן לשתי נקודות נתונות הוא מספר קבוע נתון*. התכונה (2) אומרת, שיחס המרחקים מנקודה M לנקודות I ו- J הוא גודל קבוע, השווה ליחס בסיסי הטרפז הנתון. לכן דַּי להוכיח, שהנקודה M שייכת למעגל אפולוניוס של הנקודות I ו- J. על-פי התכונות של מעגל אפולוניוס (גורן, 2000, עמ' 424-425, 433-435, 444, 456; יקואל, 2000, עמ' 223-225) – מרכזו של המעגל הנדרש נמצא על הישר IJ, ושניהם – (המעגל והישר) נחתכים בנקודות,

ש**מחלקות את הקטע IJ חלוקה הרמונית**.

<u>תכונת טרפז ידועה אומרת</u>: *עבור ארבעת הנקודות E, J, I ו- F (כאשר I ו- J הן אמצעי הבסיסים של טרפז, E ו- F הן נקודת-חיתוך האלכסונים ונקודת-חיתוך המשכי השוקיים בהתאמה) מתקיים:* **(א)** *הנקודות הללו נמצאות על ישר אחד* (גורן, 2000) ו-(ב) $\frac{IE}{EJ} = \frac{IF}{FJ}\left(=\frac{AB}{CD}\right)$ (ראו איור 2).

שוויון היחסים האחרון נובע ישר מדמיון המשולשים AIE ו- CJE, FAI ו- FDJ ומצביע על העובדה, ש**הנקודות E ו-F מחלקות את הקטע IJ חלוקה הרמונית**.



איור 2

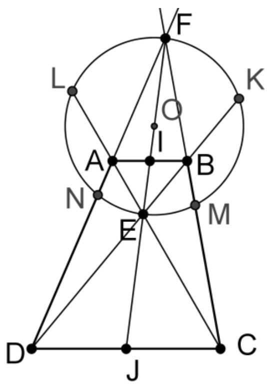
מכאן נובע, שהקטע EF הוא קוטר של מעגל אפולוניוס לנקודות I ו- J (ראו איור 2). לכן, לכל נקודה X על המעגל שקוטרו EF – מתקיים השוויון: $\frac{XI}{XJ} = \frac{AB}{CD}$.

הנקודה M שייכת למעגל זה, כי נתון, ש-$\measuredangle EMF = 90°$, ולכן $\measuredangle EMF$ היא זווית היקפית, הנשענת על הקוטר EF של המעגל. מכאן נובע, ש- $\frac{MI}{MJ} = \frac{AB}{CD}$ (תכונה 2).

מקיום התכונות (2) וחלק ב' של תכונת הטרפז הנ"ל – נובע, שבמשולש IMJ מתקיימת הפרופורצייה $\frac{MI}{MJ} = \frac{IE}{EJ}$.

זאת אומרת, *שהקטע ME הוא חוצה-הזווית IMJ* (תכונה 1).

במהלך חיפוש הוכחות של התכונות (1) ו- (2) הגענו ל**תמונת-מצב חדשה, שמכילה טרפז ומעגל אפולוניוס שלו** (איור 2).

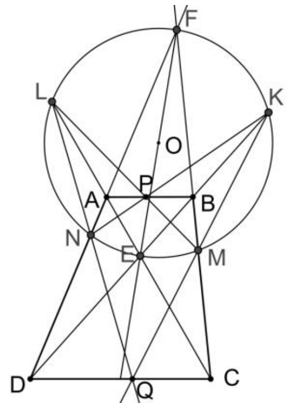


איור 3

נחקור בדרך אינדוקטיבית את תמונת-המצב הזאת – כדי לברר, האם קיימות תכונות נוספות, הקשורות לטרפז $ABCD$ ולמעגל EF. שוב נשתמש בבניות נוספות ובהתבוננות בתוצאות, ואז נמשיך את אלכסוני הטרפז BD ו- AC עד לחיתוכם עם המעגל EF בנקודות K ו-L בהתאמה. נסמן ב- N את נקודת-החיתוך של המעגל עם השוק AD (ראו איור 3).

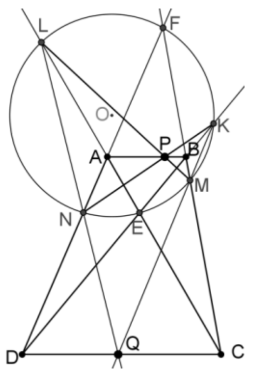
נשאלת השאלה: *מהן התכונות של הנקודות M, L, K ו- N, השייכות למעגל אפולוניוס EF?*

ניסויים בכיוונים שונים (מדידות, חישובים ובניות נוספות) – הביאו לתוצאה מפתיעה מאוד: הקטעים KN ו- ML נחתכים בנקודה P (ראו איור 4), השייכת לבסיס AB של הטרפז, והקרניים KM ו- LN נחתכות בנקודה Q, השייכת לבסיס CD.



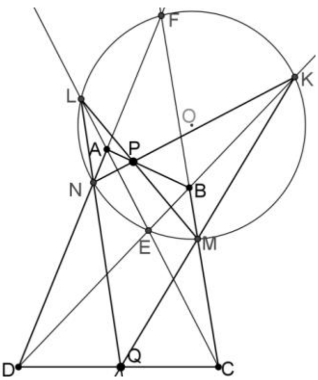
איור 4

ובכן, קיבלנו בדרך אינדוקטיבית תמונת-מצב חדשה (איור 4), וגילינו עליה שתי השערות חדשות, אשר הניסוח המשותף שלהן הוא הניסוח הבא: **ארבעת הישרים, שכל אחד מהם עובר דרך שתי נקודות באופן שאחת מהן היא נקודת-החיתוך של המעגל עם שוק הטרפז, והשנייה היא חיתוך המעגל עם המשך האלכסון – נחתכים בשתי נקודות, הנמצאות על בסיסי הטרפז: האחת – על הבסיס העליון, והשנייה – על הבסיס התחתון.**



איור 5

הניסיון (בשלב הדדוקטיבי של החקירה) למצוא הוכחות להשערות הללו רק על סמך תכונות של טרפז ושל מעגל אפולוניוס הקשור אליו – אינו נוחל הצלחה. יתר על כן, התברר (באמצעות צד נוסף של חקירה אינדוקטיבית), שההשערות הללו תקפות לכל מעגל, שעובר דרך הנקודות E ו-F וחותך את שוקי הטרפז $ABCD$ בנקודות הפנימיות M ו-N שלהן (ראו איור 5). כך הגענו ל**תמונת-מצב כללית יותר, אשר בה הקטע EF הוא מיתר המעגל** (ולאו דווקא קוטרו) ושֶבה תקפות ההשערות הללו.



איור 6

כעת ברור, שההשערות (אם הן נכונות) אינן תכונות של טרפז ומעגל אפולוניוס שלו, אלא תכונות של מרובע קמור ושל מעגל, אשר *עובר דרך נקודת-חיתוך אלכסוני המרובע ודרך נקודת-חיתוך המשכי שתי צלעות נגדיות וחותך את הצלעות הללו בנקודות הפנימיות שלהן*.

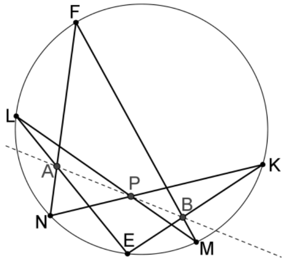
בהמשך נכנה מעגל זה בקצרה כך: **"מעגל נקודות חיתוך של שתי צלעות נגדיות ואלכסוני המרובע"**.

כך קיבלנו לחקירה תמונת-מצב כללית ביותר (ראו איור 6), אשר בה יש לבדוק ולהוכיח את קיום ההשערות הללו. בדיקה מיוחדת בעזרת תָּכְנַת GeoGebra רמזה על קיום ההשערות גם בתמונת-המצב הזאת.

נעבור להוכחה של ההשערה הראשונה: ***"נקודת-החיתוך P של הקטעים KN ו- LM שייכת לצלע AB של המרובע $ABCD$"***.

לשם כך יש להוכיח, שהנקודות A, B ו- P נמצאות על קו ישר אחד. העובדה, שהנקודות K, L,

M ו- N נמצאות על אותו מעגל – נותנת רמז לנסות להשתמש בהוכחת ההשערה במשפט פסקל לפיו: ***"צלעות נגדיות של משושה החסום במעגל – נחתכות בשלוש נקודות, הנמצאות על אותו קו ישר"*** (במשושה משוכלל, הצלעות הנגדיות נחתכות בישר האינסוף).

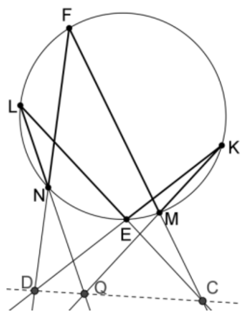


איור 7

חשוב להדגיש, שמשפט פסקל תקף גם לגבי <u>משושה כללי</u>, כלומר, עבור "משושה", שהוא **קו שבור סגור בן שישה חלקים (קטעים), שקצותיהם נמצאים על מעגל אחד** (Coxeter & Greitler, 1967). במקרה שלנו (ראו איור 6) – על המעגל נמצאות שש נקודות: E, M, K, F, L ו-N. קל לבדוק עבור המשושה $EMKFLN$ (משושה במובן הרגיל), שהנקודות A, B ו-P אינן נקודות-החיתוך של צלעותיו הנגדיות, אבל במקרה של קו שבור סגור $EKNFML$ (ראו איור 7) – עבור צלעותיו הנגדיות מתקיים: EL ו-NF נחתכות בנקודה A, ML ו-KN נחתכות בנקודה P, FM ו- EK נחתכות בנקודה B, ובנוסף, "המשושה" $EKNFML$ חסום במעגל.

לכן, על-פי משפט פסקל, הנקודות P,A ו-B נמצאות על אותו קו ישר, כלומר מתקיים $P \in AB$.

להלן ההוכחה של ההשערה השנייה: ***"נקודת-החיתוך Q של הקרניים KM ו- LN שייכת לצלע CD של המרובע $ABCD$".***



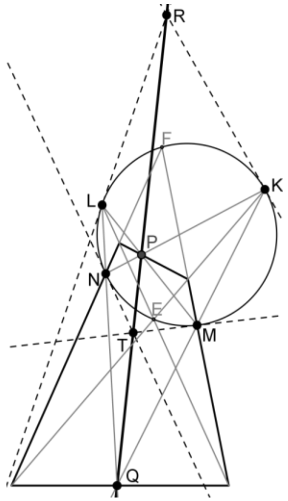
איור 8

לשם כך נוכיח, כי הנקודות C, Q ו-D נמצאות על אותו קו ישר: נתבונן בקו שבור סגור (משושה כללי) $EKMFNL$, שמתואר באיור 8. עבור המשכי הצלעות הנגדיות של "המשושה" – מתקיים: הישרים EL ו-MF נחתכים בנקודה C; הישרים KN ו-NL – בנקודה Q; EK ו-FN – בנקודה D. מהעובדה, ש"משושה" $EKMFNL$ חסום במעגל, לפי משפט פסקל הכללי – נובע, כי הנקודות C, Q ו-D נמצאות על אותו קו ישר.

<u>לסיכום</u>: בשלב הדדוקטיבי של חקירת תמונת-המצב, שמתוארת באיור 6 – הצלחנו להוכיח שתי השערות על מיקומן ההדדי של נקודות החיתוך P ו-Q. נשים לב, שאת ההשערות הללו גילינו בהתחלה בתמונת-מצב פרטית יותר, שמתוארת באיור 4.

<u>הערה</u>: כיוון שנעזרנו במשפט פסקל בתהליך ההוכחה – נכנה את נקודות-החיתוך Q-P בשם **"נקודות פסקל" על צלעות המרובע, המתאימות ל"מעגל נקודות חיתוך** (מסוים) **של שתי צלעות נגדיות ואלכסוני המרובע"**.

<u>נבדוק עתה, האם קיימות תכונות מעניינות נוספות, הקשורות לנקודות P ו- Q</u>?

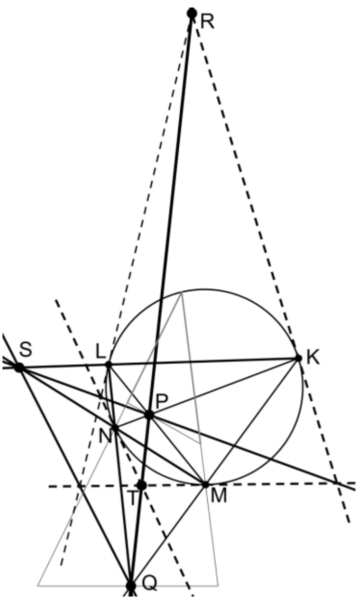


איור 9

כדי לברר זאת – נמשיך בחקירה אינדוקטיבית של תמונות-מצב, הקשורות לאיור 6. לשם כך נעביר ישר PQ, ונחפש את תכונותיו המיוחדות. ניסויים של מדידות ובניות נוספות (כולל גם בניית משיקים שונים למעגל) יחד עם התבוננות בתוצאות המתקבלות – מביאות ל<u>השערה החדשה הבאה</u>:

המשיקים למעגל בנקודות M ו- N נחתכים בנקודה, השייכת לישר PQ** (הנקודה T באיור 9)**, וגם המשיקים למעגל בנקודות K ו- L נחתכים בנקודה, השייכת לישר PQ (הנקודה R באיור 9).

בהמשך נכנה את הישר העובר דרך נקודות P ו-Q (הישר PQ) בשם ***"ישר של נקודות פסקל"***.



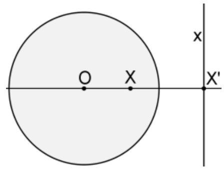
איור 10

כדי להוכיח את ההשערה האחרונה (השלב הדדוקטיבי החדש בחקירה) – נבצע את הבניות הנוספות הבאות: (א) של הישרים KL ו-MN, ונסמן ב-S את נקודת חיתוכם; (ב) של הישרים SP ו-SQ (ראו איור 10).

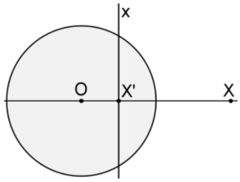
<u>נשתמש בתכונות של **הקוטב** (pole) **והפולרה** (polar) **שלו ביחס למעגל הנתון** ***(O,r)***</u> (Hadamart, 2005; Coxeter & Greitler, 1967):

1) *לכל נקודה X (הנקראת "קוטב"), השונה ממרכז המעגל O – ניתן להתאים ישר x (הנקרא "פולרה של X") באופן שהישר x יהיה מאונך לישר OX ועובר דרך הנקודה X', שהיא שייכת לקרן OX ומקיימת את התנאי: $|OX|\cdot|OX'|=r^2$ (כאן r – רדיוס המעגל).*

שני המצבים העיקריים של הקוטב X והפולרה x שלו ביחס למעגל O – מתוארים באיורים 11 (כאן קוטב X נמצא מחוץ למעגל) ו-12 (כאן קוטב X נמצא בתוך המעגל).



איור 11

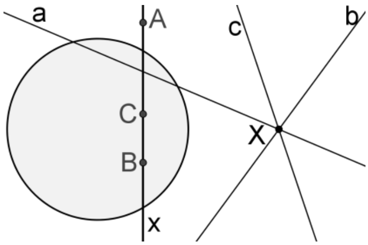


איור 12

2) התכונה העיקרית של הקוטב והפולרה שלו:

*אם הנקודה X **נמצאת על הפולרה y של הנקודה Y, אז הפולרה x של הנקודה X עוברת דרך Y.*** מתכונה זאת נובעת המסקנה החשובה הבאה:

אם דרך נקודה X עוברים ישרים $a, b, c, ...$, אז הקטבים שלהם $A, B, C, ...$ (ביחס למעגל הנבחר) – שייכים לאותו ישר x, שהוא פולרה של הקוטב X.

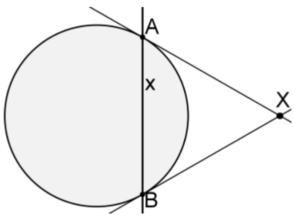


איור 13

3) שתי תכונות נוספות (השייכות למקרה של איור 11), נשתמש בהן להוכחת ההשערה:

תכונה (א)

הפולרה x של קוטב נתון X היא ישר, העובר דרך נקודות-ההשקה של שני משיקים למעגל, שיוצאים מ-X (ראו איור 14).

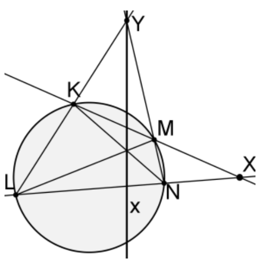


איור 14

ההוכחה של ההשערה האחרונה (ראו איור 10), על סמך תכונה 3א׳ – הישר MN הוא פולרה של הנקודה T, והישר KL הוא פולרה של הנקודה R.

תכונה (ב)

אם עבור שני חותכים MK ו-NL *למעגל*, היוצאים **מנקודה** X, מתקיימים: המשכי הצלעות הנגדיות KL ו-MN של המרובע $MKLN$ (החסום במעגל) נחתכים בנקודה Y – אז ישר, העובר דרך הנקודה Y ודרך נקודת-חיתוך אלכסוני המרובע (הישר x באיור 15), הוא פולרה של X.



איור 15

בהוכחה שלנו, על-פי תכונה 3ב', הפולרה של נקודה Q ביחס למעגל היא הישר PS, והפולרה של נקודה S ביחס למעגל היא הישר PQ (איור 10). לכן, מהעובדה שהישרים PQ ו- PS (שהם פולרות של הנקודות S ו-Q בהתאמה) נחתכים בנקודה P – נובע (על-פי תכונה 2 או, יותר מדויק, על-פי מסקנה מהתכונה העיקרית של הקוטב והפולרה שלו), שהנקודות S ו- Q שייכות לפולרה של הקוטב P. זאת אומרת שהפולרה של P היא הישר SQ. בהמשך ההוכחה, באופן דומה, כתוצאה מהעובדה שארבעת הישרים (הפולרות) SQ, SP, KL ו- MN עוברים דרך אותה נקודה S – נקבל, כי הקטבים שלהם (הנקודות P, Q, R ו-T בהתאמה) – נמצאים על אותו קו ישר. לכן $\boldsymbol{R, T \in PS}$, כלומר, **הוכחנו את ההשערה, הקשורה לישר $\boldsymbol{PQ}$.**

בזה מסתיים השלב הדדוקטיבי של חקירת תמונת-המצב שבאיור 9.

אבל התבוננות נוספת על ארבעת המשיקים שבאיור 10 מראה, שגם <u>בזוגות אחרים</u> המשיקים הללו נחתכים על-פי הטענות הבאות:

(1) שתי-נקודות-החיתוך של זוגות המשיקים בנקודות $\boldsymbol{K}$ ו-$\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{L}$ ו-$\boldsymbol{N}$ נמצאות על הישר $\boldsymbol{PS}$.

(2) נקודת-החיתוך של המשיקים למעגל בנקודות $\boldsymbol{M}$ ו-$\boldsymbol{L}$ נמצאת על הישר $\boldsymbol{QS}$.

ההוכחה של טענה (1) דומה להוכחת ההשערה על משיקים, שנחתכים על הישר PQ.

נביא <u>הוכחה של טענה (2)</u>:

נסמן ב-V את נקודת-החיתוך של המשיקים למעגל בנקודות M ו-L (V היא נקודת המפגש של הקווים המרוסקים RL ו- MT באיור 10). על-פי תכונה 3א' של הקוטב והפולרה שלו, הישר LM הוא פולרה של נקודה V ביחס למעגל. מהעובדה, ששלושת הישרים SP , QP ו- LM עוברים דרך אותה נקודה P – נובע (מסקנה מהתכונה העיקרית 2), שהקטבים שלהן, זאת אומרת, הנקודות Q, S ו- V בהתאמה, נמצאים על הפולרה של הנקודה P, כלומר, על הישר SQ. קיבלנו: $V \in SQ$. מש"ל.

מהוכחה זו קל להסיק <u>את המסקנה הבאה</u>: **גם המשיקים למעגל בנקודות $\boldsymbol{K}$ ו-$\boldsymbol{N}$** (זוג שני של קדקודים נגדיים במרובע $KLNM$) – **נחתכים על הישר $\boldsymbol{QS}$**. אכן, הישר KN הוא פולרה של נקודת-חיתוך-המשיקים הללו, והוא עובר דרך הקוטב P של הישר QS.

הערות:

1. נשים לב, שקיבלנו את המסקנה האחרונה בדרך דדוקטיבית, אפילו שאין אפשרות לראות את נקודת-חיתוך-המשיקים למעגל בנקודות K ו- N באיור 10.
2. ניתן להוכיח בדרך אחרת את טענה (2) – בעזרת שימוש באחד המקרים הפרטיים של משפט פסקל, דהיינו:

אם יש ב"משושה" <u>שני זוגות קדקודים סמוכים שמתלכדים</u>, **הופך המשושה למרובע**,

והישרים, שעברו דרך "שתי צלעות המשושה", שהן, למעשה, שני זוגות של הנקודות המתלכדות – **הופכים למשיקים למעגל בנקודות ההתלכדות.**

לכן, אם המרובע $KLNM$ החסום במעגל (ראו איור 10) הוא "משושה" שקודקודיו 123456, ובו הקדקודים 2 ו-3, 5 ו-6 מתלכדים, כלומר, $K=1$, $L=2=3$, $N=4$, $M=5=6$, אז הישרים, העוברים דרך הצלעות הנגדיות $\overline{23}$ ו- $\overline{56}$, הם משיקים למעגל החוסם בנקודות M ו- L. לפיכך, נקודת-החיתוך שלהם (הנקודה V) נמצאת על אותו ישר עם הנקודות S (שהיא נקודת-החיתוך של $KL=\overline{12}$ ו- $MN=\overline{45}$) ו- Q (שהיא נקודת-החיתוך של $LN=\overline{34}$ ו- $KM=\overline{16}$).

סיכום

באמצעות חקירת תמונת-מצב מתמטית מסוימת (במקרה זה גאומטרית) – תואר תהליך **אינדוקטיבי-דדוקטיבי ספירלי דו-כיווני** על מנת לגלות בה תכונות חדשות של הצורות. במהלך המחקר, התוצאה של כל שלב אינדוקטיבי היא גילוי השערות על קיום של תכונות כלליות, השייכות לתמונת-המצב הנחקרת.

התוצאות של כל שלב דדוקטיבי הן:

(א) הוכחה או הפרכה של ההשערות, הקשורות לשלב האינדוקטיבי הקודם.

(ב) קבלת תמונת-מצב מורחבת יותר, אשר מאפשרת להמשיך את המחקר באמצעות חזרה על השלב האינדוקטיבי החדש, וכן הלאה.

בתהליכי-החקירה המתמטית, גילינו והוכחנו את התכונות הבאות:

(1) תכונה של *אנך לשוק הטרפז*, היוצא מנקודת-החיתוך של אלכסוני הטרפז.

(2) תכונה של שתי "**נקודות פסקל**" על צלעות של מרובע קמור (שאינו מקבילית), הנוצרות באמצעות **מעגל החותך שתי צלעות נגדיות של המרובע, ועובר בנקודת החיתוך שלהן וגם בנקודת חיתוך האלכסונים**.

(3) תכונה על נקודות החיתוך של משיקים למעגל זה, הקשורה ל"**ישר של נקודות פסקל**".

ביבליוגרפיה

גורן, ב' (2000). **הנדסה** (כרך ב). תל-אביב: המחבר.

יקואל, ג' (2000). **הנדסה אנליטית 4-5 יחידות לימוד**. קרית ביאליק: משבצת.

Hadamart, J. (2005). **Lecons de geometrie elementaire**. Ann Arbor, Michigan: University of Michigan Library.

Coxeter, H. S. M., & Greitler, S. L. (1967). **Geometry revisited**. Washington, D.C.: Mathematical Association of America.