רחל מוגילבסקי

שקילות בפתרון משוואות, מערכות משוואות ואי-שוויונים (חלק א)

תקציר

ברבים מענפי המדע, כגון מתמטיקה, פיסיקה, כימיה, ביולוגיה, כלכלה ועוד – לעתים קרובות יש לפתור משוואה או מערכת משוואות או אי-שוויון ברמות-קושי שונות.

משמעות פתירת המשוואה היא מציאת קבוצת ערכים בשם שורשים, שהצבתם מקיימת את המשוואה, כלומר יוצרת פסוק אמת.

תהליך הפתרון הוא מעבָר מהמשוואה הנתונה – למשוואה יותר פשוטה, שקל יותר לפותרה.

בדרך זאת משתמשים בחוקים שונים, בזהויות שונות.

השאלה היא האם המעבָר מהמשוואה המקורית אל המשוואה החדשה – לא שינה את קבוצת השורשים של המשוואה המקורית, או, במילים אחרות, האם בכל מעבר מקבלים משוואה, השקולה למשוואה, שהייתה לפני ביצוע המעבר?

המאמר הנוכחי חוקר את התנאים שצריכים להתקיים – כדי להבטיח, שהמעבר למשוואה החדשה שומר על השקילות של המשוואות.

בנוסף לכך, מבהיר המאמר, כי השימוש בזהויות מתמטיות – עלול לגרום לשינוי קבוצת הפתרונות, ומביא המלצות למניעת הדבר.

בחלק משאלוני הבגרות במתמטיקה בשנים האחרונות מופיעות שאלות, המחייבות חשיבה מעמיקה ושימוש בטכניקות אלגבריות. לכן במסגרת הכשרת המורים להוראת המקצוע – יש להגביר את ההבנה של נושא השקילות בשלבי הפתרון של משוואות, מערכות משוואות ואי-שוויונים.

ההמשך של חקר התנאים לשקילות של מערכת משוואות ואי-שוויונים – יופיע בחלק ב של המאמר.

מילות מפתח: *תחום הגדרה; שקילות-משוואות; מסקנה של משוואה; טרנספורמציות זהותיות.*

מבוא

כדי לפתור משוואה או מערכת משוואות – עוברים צעד-צעד למשוואות ולמערכות פשוטות יותר, שקל יותר לפתור.

איך ניתן להיות בטוחים, שהמעבר הוא "חוקי", כלומר שנקבל פתרונות של המשוואה

המקורית, לא נאַבד פתרונות, ולא נקבל פתרונות זרים?

היום, כשתוכן מבחני הבגרות מתעמק – קיים צורך למורים להבין את נושא השקילות בפתרון משוואות, מערכות משוואות ואי-שוויונים. את חשיבות הנושא הדגישו, למשל, חייט (2005), שטיינברג, סליימן וקטורזה (Steinberg, Sleeman, & Ktorza, 1991); ברוס (Bruce, 1931); אטורפס וטוסאויניין (Attorps & Tossavainen, 2009).

נציג ארבע דוגמאות:

דוגמה 1

לתלמיד הציעו לפתור את המשוואה $\sqrt{x}+x=2$.

הוא כתב מהר ובביטחון: $\sqrt{x}=2-x$, $x=4-4x+x^2$, $x^2-5x+4=0$

$x_1=4$, $x_2=1$

התלמיד היה מבולבל, כאשר בהצבה של x_1 במשוואה המקורית הוא קיבל $6=2$.

דוגמה 2 (Kreynin, 1994)

תלמיד אחר פתר את המשוואה $\frac{x^2-10x+21}{x-7}+x=11$.

התלמיד פירק את המונה: $\frac{(x-7)(x-3)}{x-7}+x=11$.

הוא צמצם את השבר וקיבל משוואה פשוטה $x-3+x=11$, ואז התשובה $x=7$.

דוגמה 3

תלמד אחד פתר את המשוואה $\log_2(x-3)^2=2$.

לפי כלל הלוגריתמים, הוא פתר: $2\log_2(x-3)=2$, $\log_2(x-3)=1$, $x-3=2$,

לכן $x=5$.

דוגמה 4

תלמיד אחד פתר את אי-השוויון: $\sqrt{x^2-9}>2x-6$.

הוא זיהה, כי תחום ההגדרה הוא $x\geq3$ או $x\leq-3$.

אחרי העלאת שני הצדדים בריבוע – קיבל התלמיד: $x^2-9>4x^2-24x+36$,

ואז $x^2 - 8x + 15 < 0$.

הפתרון של אי-השוויון האחרון הוא: $3 < x < 5$.

אם ניקח בחשבון את תחום ההגדרה, אז התשובה היא: $3 < x < 5$.

בשני התרגילים הראשונים נתקלנו בשורש זר, ואילו בתרגיל השלישי – שימוש פורמלי בכלל הלוגריתמים הביא לאיבוד שורש $x=1$ של המשוואה, ובתרגיל הרביעי התלמיד איבד קבוצה נוספת של פתרונות, $x \leq -3$.

הסיבה למצב שנוצר היא, שבשרשרת המשוואות לא התייחסו לתחום ההגדרה של כל אחת מהמשוואות.

המסקנה: אסור להפריד פתרון של משוואה, מערכת משוואות או אי-שוויון מתחום ההגדרה שלהם.

צריך לבדוק, אם המעבר שומר על שקילות האובייקטים, ואם לא, איך "לתקן" את המצב.

לימדתי את הנושא בכמה קבוצות בסמינריון מתמטי במכללה להכשרת-מורים לבתי-ספר על-יסודיים, וכל הסטודנטים הגיבו בעניין רב והצטערו שלא מלמדים את הדברים בבית-הספר.

אני חושבת, כי המאמר אקטואלי מאוד.

הוא לא מיועד לתלמידי בית-ספר, אלא למורים, למורי-מורים ולסטודנטים-מורים בעתיד.

1. תורת השקילות

נתבונן בשתי פונקציות $F_1(x_1, x_2, \dots, x_k)$ בעלת תחום הגדרה D_1

ו- $F_2(x_1, x_2, \dots, x_k)$ בעלת תחום הגדרה D_2.

D_1 ו- D_2 תחומים במרחב R^k.

הגדרה 1.1

הביטוי:

$$F_1(x_1, x_2, \dots, x_k) = F_2(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

נקרא **משוואה עם k נעלמים**.

יהי k- סדורה $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ נקראת **קבוצת ערכים מותרים למשוואה,**

אם $(a_1, a_2, \dots, a_k) \in D_1$ וגם $(a_1, a_2, \dots, a_k) \in D_2$.

תחום, המורכב מקבוצות ערכים מותרים, הוא חיתוך $D = D_1 \cap D_2$, ונהוג לקרוא לו **תחום ההגדרה של המשוואה**.

אז תחום ההגדרה של המשוואה הוא חיתוך תחומי ההגדרה של שני הצדדים של המשוואה:

$$D = D_1 \cap D_2$$

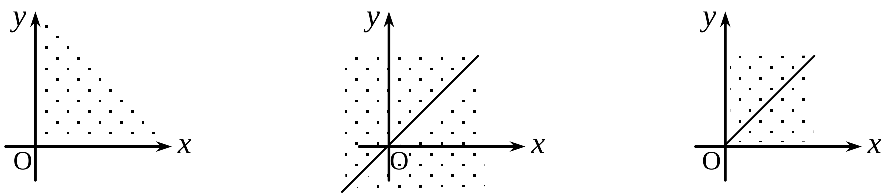
דוגמה 1.1

נתונה הפונקציה: $\log x + \log y = \dfrac{1}{x-y}$.

D_1 הוא הרביע הראשון ללא הצירים (תחום פתוח).

D_2 הוא כל המישור xOy, חוץ מהנקודות על הישר $x=y$.

D – כל הנקודות ברביע הראשון ללא הצירים וללא חוצה-הזווית הישרה.



D_1 D_2 D

הגדרה 1.2

k- יה סדורה $(a_1, a_2, \dots, a_k)$, השייכת ל-D (קבוצת ערכים מותרים), נקראת

פתרון של המשוואה, אם מתקיים: $F_1(a_1, a_2, \dots, a_k) = F_2(a_1, a_2, \dots, a_k)$.

נסמן את קבוצת הפתרונות של המשוואה ב-M .

נתבונן ב-3 אפשרויות:

(א) $M=D$. במקרה זה, המשוואה נקראת **זהות**.

למשל, $\dfrac{x^2-y^2}{x-y} = x+y$ מתקיים לכל הזוגות (x,y) מתחום ההגדרה, כלומר כאשר $x \neq y$.

(ב) $M=\varnothing$, כלומר למשוואה אין פתרון.

למשל, $|x|+|y|+1=0$. במקרה כזה אומרים, כי המשוואה **סותרת**.

(ג) $\varnothing \neq M \subset D$.

הערה: מספר הפתרונות של משוואה תלוי לפעמים לאיזה שדה של מספרים שייך תחום

ההגדרה D. למשל, למשוואה $x^2+y^2=0$ יש פתרון יחיד, אם D – קבוצת המספרים הממשיים ($D=R^2$), אבל אינסוף פתרונות $(t\ ,\pm ti)$, אם D – קבוצת המספרים המרוכבים ($D=C^2$).

נתבונן בשתי המשוואות:

$$(F)\qquad F_1(x_1\ ,\ x_2\ ,\ ...\ ,\ x_k)=F_2(x_1\ ,\ x_2\ ,\ ...\ ,\ x_k)$$

$$(G)\qquad G_1(x_1\ ,\ x_2\ ,\ ...\ ,\ x_k)=G_2(x_1\ ,\ x_2\ ,\ ...\ ,\ x_k)$$

הגדרה 1.3

נגיד, שמשוואה (F) היא **מסקנה מ- (G)** ((F)⇐(G)), (G) גוררת את (F).

אם כל פתרון של (G) הוא גם פתרון של (F). במילים אחרות, $M_G\subseteq M_F$.

דוגמה 1.2

$$(F)\quad \sin x=0 \qquad\qquad (F)\Leftarrow(G)$$
$$(G)\quad x(x-p)=0$$

הגדרה 1.4

המשוואות (F) ו- (G) נקראות **משוואות שקולות**, אם כל פתרון של (F) הוא גם פתרון של (G), ולהפך, כל פתרון של (G) הוא גם פתרון של (F), כלומר $M_F=M_G$. סימון: F~G

במילים אחרות, F~G אם ורק אם (F)⇐(G), וגם (G)⇐(F).

דוגמה 1.3

המשוואות $|x|+|y|=0$ ו- $x^2+y^2=0$ שקולות בשדה המספרים הממשיים, ולא שקולות בשדה המספרים המרוכבים.

2. פעולות שאינן מפרות שקילות

משפט 2.1

אם הפונקציה $\varphi(x_1 , x_2 , \dots , x_k)$ מוגדרת בכל תחום ההגדרה של המשוואה:

$$(F) \qquad F_1(x_1 , \dots , x_k) = F_2(x_1 , \dots , x_k)$$

אז המשוואה (F) שקולה למשוואה הבאה:

$$(F+\varphi) \qquad F_1(x_1 , \dots , x_k)+\varphi(x_1 , \dots , x_k)=F_2(x_1 , \dots , x_k)+\varphi(x_1 , \dots , x_k)$$

הוכחה

נניח, כי $(a_1 , \dots , a_k) \in M_F$ פתרון של (F), כלומר:

$$F_1(a_1 , \dots , a_k) = F_2(a_1 , \dots , a_k)$$

נוסיף את הביטוי $\varphi(a_1 , \dots , a_k)$, המוגדר לפי הנתונים, לשני הצדדים של השוויון הקודם:

$$F_1(a_1 , \dots , a_k) + \varphi(a_1 , \dots , a_k) = F_2(a_1 , \dots , a_k) + \varphi(a_1 , \dots , a_k)$$

לכן: $(a_1 , \dots , a_k) \in M_{F+\varphi}$.

להפך, אם $(b_1 , \dots , b_k) \in M_{F+\varphi}$ פתרון של $(F+\varphi)$, כלומר:

$$F_1(b_1 , \dots , b_k) + \varphi(b_1 , \dots , b_k) = F_2(b_1 , \dots , b_k) + \varphi(b_1 , \dots , b_k)$$

אז נוסיף לשני הצדדים את הביטוי $-\varphi(b_1 , \dots , b_k)$, נקבל, כי $(b_1 , \dots , b_k) \in M_F$.

מ.ש.ל.

הערה: יש חשיבות רבה לתנאי, ש- $\varphi(x_1 , \dots , x_k)$ מוגדרת לכל תחום ההגדרה של (F).

דוגמה 2.1

$$(F) \qquad x^2 + 6 = 5x$$

תחום ההגדרה: R

$x=2\ ,\ x=3 \qquad \mathrm{M}_F$

נגדיר $\varphi(x)=\lg(x-3)$ עם תחום ההגדרה $x>3$.

למשוואה $x^2+6+\lg(x-3)=5x+\lg(x-3)$ אין פתרונות.

המשוואה $(\mathrm{F}+\varphi)$ איננה שקולה ל- (F), כי תחום ההגדרה של φ אינו כולל את כל תחום ההגדרה של (F) .

מסקנה 1

המשוואה $\mathrm{F}_2(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_k)=\mathrm{F}_1(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_k)+\varphi(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_k)$ שקולה למשוואה $\mathrm{F}_2(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_k)-\varphi(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_k)=\mathrm{F}_1(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_k)$, כלומר אפשר להעביר מחוברים מצד לצד עם סימן הפוך.

מסקנה 2

כל משוואה אפשר להעביר לצורה $\mathrm{F}(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_k)=0$.

משפט 2.2

אם פונקציה $\varphi(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_k)$ מוגדרת עבור כל תחום ההגדרה של (F),

אז המשוואה

$$\varphi(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_k)\cdot\mathrm{F}_1(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_k)=\varphi(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_k)\cdot\mathrm{F}_2(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_k) \qquad (\varphi\mathrm{F})$$

היא מסקנה של המשוואה (F) .

הוכחה

נניח $(a_1\ ,\ \dots\ ,\ a_k)\in\mathrm{M}_F$ פתרון של (F), כלומר $\mathrm{F}_1(a_1\ ,\ \dots\ ,\ a_k)=\mathrm{F}_2(a_1\ ,\ \dots\ ,\ a_k)$.

$\varphi(a_1\ ,\ \dots\ ,\ a_k)$ – מספר. נכפול בו את שני האגפים של השוויון הקודם:

$$\varphi(a_1\ ,\ \dots\ ,\ a_k)\cdot\mathrm{F}_1(a_1\ ,\ \dots\ ,\ a_k)=\varphi(a_1\ ,\ \dots\ ,\ a_k)\cdot\mathrm{F}_2(a_1\ ,\ \dots\ ,\ a_k)$$

כלומר $(a_1\ ,\ \dots\ ,\ a_k)\in\mathrm{M}_{(\varphi F)}$, אז $(\mathrm{F})\Rightarrow(\varphi\mathrm{F})$.

משפט 2.3

אם פונקציה $\varphi(x_1 , \dots , x_k)$ מוגדרת ושונה מאפס עבור כל תחום ההגדרה של המשוואה (F), אז המשוואות (F) ו- (φF) שקולות.

הוכחה

$(F)\rightarrow(\varphi F)$ הוכַח במשפט 2.2.

הטענה ההפוכה מתקבלת במכפלת שני האגפים של (φF) ב- $\dfrac{1}{\varphi(a_1 , \dots , a_k)}$.

דוגמה 2.2

$$2x-1=x \qquad (F) \qquad D_F = R \qquad \varphi(x)=x$$

$\varphi(x)$ מקיימת את התנאי של משפט 2.2, ולא מקיימת את התנאי של משפט 2.3.

לכן המשוואה $(2x-1)x = x^2$ (φF) היא מסקנה של (F) $((F)\rightarrow(\varphi F))$,

אבל (φF) אינה שקולה ל- (F).

אם, למשל, $\varphi(x) = x^2 + 1$, אז $(\varphi F)\sim(F)$.

משפט 2.4

נתונה המשוואה: $F_1(x) = F_2(x) \qquad (F)$.

תהי $\varphi(x)$ פונקציה כלשהי.

נתבונן במשוואה: $\varphi\left[F_1(x)\right] = \varphi\left[F_2(x)\right] \qquad (\varphi[F])$.

אם פונקציה $\varphi(x)$ מוגדרת לכל הטווח של הפונקציות F_1 ו- F_2, אז המשוואה $(\varphi[F])$ היא מסקנה של (F).

הוכחה

אם $a \in M_F$, כלומר $F_1(a) = F_2(a)$, אז $\varphi\left(F_1(a)\right) = \varphi\left(F_2(a)\right)$, כלומר $a \in M_{(\varphi[F])}$.

דוגמה 2.3

$$2x-1=x \qquad (F)$$

$\varphi(x) = x^2$

$(\varphi[F]) \quad (2x-1)^2 = x^2$

$(\varphi[F]) \Leftarrow (F)$, אבל המשוואות לא-שקולות.

דוגמה 2.4

$(F) \qquad x-1=0$

$\varphi(x)=\sin x$

$(\varphi[F]) \qquad \sin(x-1)=0$

$(\varphi[F]) \Leftarrow (F)$, אבל המשוואות לא שקולות.

משפט 2.5

אם לפונקציה $\varphi(x)$ קיימת פונקציה הפוכה חד-ערכית בכל הטווח של $\varphi(x)$,
אז המשוואה (F) היא מסקנה של $(\varphi[F])$.

הוכחה

$(F) \qquad F_1(x) = F_2(x)$

נניח, ש- $a \in M_{(\varphi[F])}$, כלומר $\varphi(F_1(a)) = \varphi(F_2(a))$.

מכיוון ש $\varphi(x)$ מקבלת כל ערך רק בנקודה אחת, אז $F_1(a) = F_2(a)$, ואז $a \in M_F$.

מ.ש.ל.

מסקנה

אם פונקציה φ מקיימת את התנאים של משפטים 2.4 וגם 2.5, אז המשוואות (F) ו- $(\varphi[F])$ שקולות.

דוגמה 2.5

$(F) \qquad x^2 - x = 2x - 2$

$\varphi(x)=\log x$

$(\varphi[F]) \qquad \log(x^2 - x) = \log(2x - 2)$

למשוואה (F) יש 2 שורשים: $x_1 = 1\ ,\ x_2 = 2$.

למשוואה $(\varphi[F])$ יש רק שורש אחד: $x=2$.

הדבר קרה, מפני שהפונקציה $\varphi(x)$ מקיימת את התנאים של משפט 2.5, אבל לא מקיימת את התנאים של משפט 2.4. לכן $(\varphi[F]) \rightarrow (F)$, משוואה (F) היא מסקנה של $\varphi(F)$.

דוגמה 2.6

$\sqrt[3]{x^3 - x + 2} = x + 1 \qquad (F)$

$\varphi(x) = x^3$

$(\varphi[F]) \qquad x^3 - x + 2 = (x+1)^3$

הפונקציה $\varphi(x)$ מוגדרת בכל תחום ההגדרה של הפונקציות $F_1(x) = \sqrt[3]{x^3 - x + 2}$

ו- $F_2(x) = x + 1$, וגם ל- $\varphi(x)$ יש פונקציה הפוכה חד-ערכית לכל R.

לכן $\varphi(x)$ מקיימת את התנאים של משפט 2.4 וגם את התנאים של משפט 2.5, ואז $(\varphi[F]) \sim (F)$.

דוגמה 2.7

$x^2 - 2 = 2 \qquad (F)$

$\varphi(x)=\log x$

$(\varphi[F]) \qquad \log(x^2 - 2) = \log 2$

לשתי המשוואות יש פתרונות $x = \pm 2$, אף-על-פי ש- φ אינה מוגדרת בכל הטווח

של הפונקציה $F_1(x) = x^2 - 2$.

3. איבוד פתרונות וקבלת פתרונות זרים בטרנספורמציות זהותיות של צדי המשוואה

הגדרה 3.1

נקרא את הפונקציה $F_2(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots\ ,\ x_k)$ **שווה זהותית** לפונקציה $F_1(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots\ ,\ x_k)$

ונסמן $F_1 \equiv F_2$, אם ערכי הפונקציות מתלכדים בכל תחום ההגדרה של המשוואה $F_1 = F_2$,

כלומר ערכי הפונקציות מתלכדים לכל ערכי הנעלמים, השייכים בו-זמנית ל- D_{F_1} (תחום

ההגדרה של F_1) וגם ל- D_{F_2} (תחום ההגדרה של F_2).

הגדרה 3.2

החלפת פונקציה בפונקציה, השווה לה זהותית, נקראת **טרנספורמציה זהותית**.

למשל, $10^{\log x} \equiv x$, $\sqrt{x(x-1)}=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-1}$.

הבעיה היא, שבהחלפת ביטוי אחד במשוואה בביטוי, השווה לו זהותית, הרי תחום ההגדרה של המשוואה יכול להשתנות.

לדוגמה, השוויון הזהותי $\log xy \equiv \log x + \log y$ מתקיים עבור $x>0$ וגם $y>0$.

אם במשוואה כלשהי מחליפים את $\log xy$ ב- $\log x+\log y$, אז תחום ההגדרה $(xy>0)$ מצטמצם ל- ($x>0$ וגם $y>0$), כלומר מצטמצם תחום ההגדרה של המשוואה, ולכן יכולים לאבד פתרונות של המשוואה.

אם, להפך, במשוואה כלשהי מחליפים $\log x+\log y$ ב- $\log xy$, אז תחום ההגדרה של המשוואה יגדל, ולכן יכולים לקבל פתרונות זרים.

אם תחום ההגדרה של המשוואה **יקטן**, אז חלק מהפתרונות יכולים ללכת לאיבוד.

אם תחום ההגדרה של המשוואה **יגדל**, אז יכולים להתקבל **פתרונות זרים**.

זאת הסיבה, שבתהליך פתרון המשוואה – לא די לבצע רק פעולות, שלא מפרות את השקילות (משפטים 2.1-2.5), אלא לעקוב אחרי טרנספורמציות זהותיות, כלומר צריך לשלב את תהליך הפתרון עם מעקב אחרי תחום ההגדרה **בכל שלב**.

דוגמה 3.1

למשוואה $\sqrt{x(x-3)}=2$ (F) תחום הגדרה $D_F=\{x\le 0\ ,\ x\ge 3\}$.

אם נקיים טרנספורמציה זהותית $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-3}=2$ (G),

אז תחום ההגדרה הוא $D_G=\{x\ge 3\}$.

למשוואה (F) יש 2 פתרונות: $x_1=4\ ,\ x_2=-1$, ולמשוואה (G) יש רק פתרון אחד, $x=4$.

איבדנו שורש של המשוואה המקורית – בגלל צמצום תחום ההגדרה של המשוואה.

פעולות שיכולות לגרום לפתרון זר

(א) כפל שני צדי המשוואה בביטוי, שיכול להתאפס בתחום ההגדרה של המשוואה המקורית; למשל, ביטול המכנה המשותף.

(ב) העלאת שני האגפים בחזקה זוגית.

(ג) טרנספורמציות זהותיות עם לוגריתמים:

למשל, $2\log_a x=\log_a x^2\quad;\quad \log_a x+\log_a y=\log_a xy\quad;\quad a^{\log_a x}=x$

(ד) טרנספורמציות זהותיות עם שורשים מסדר זוגי:

למשל, $\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=\sqrt{xy}\quad;\quad \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\sqrt{\dfrac{x}{y}}\quad;\quad \left(\sqrt[4]{x}\right)^2=\sqrt[4]{x^2}$

כיצד למנוע פתרונות זרים?

דרך א: לקבוע מראש את תחום ההגדרה של המשוואה המקורית ולבחור בין התשובות המתקבלות רק את אלה השייכות אליו.

דרך ב: להציב את כל התשובות במשוואה המקורית ולזרוק שורשים זרים.

פעולות היכולות לגרום לאיבוד פתרונות

(א) חלוקה בביטוי, שיכול להתאפס בתחום ההגדרה של המשוואה המקורית.

(ב) הוצאת שורש זוגי משני צדי המשוואה.

(ג) טרנספורמציות זהותיות עם לוגריתמים:

למשל, $\log_a xy=\log_a x+\log_a y\quad;\quad \log_a x^2=2\log_a x$

(ד) טרנספורמציות זהותיות עם שורשים מסדר זוגי:

למשל, $\sqrt{xy}=\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}$; $\sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$; $\sqrt[4]{x^2}=\left(\sqrt[4]{x}\right)^2$

(ה) חלק מטרנספורמציות זהותיות טריגונומטריות:

למשל, $\operatorname{ctg}x=\frac{1}{\operatorname{tg}x}$

מניעת איבוד פתרונות קשה הרבה יותר ממניעת פתרונות זרים

דרך א: לעקוב בכל פעולה ו"לתפוס" את הפתרון שנאבד, כלומר להציב את ערכי הנעלמים, שירדו מתחום ההגדרה במשוואה המקורית, ולבדוק אם הם הפתרונות.

דרך ב: להיעזר בגרף של שני צדי המשוואה – כדי לקבוע את מספר הפתרונות הנכון.

המלצות למניעת איבוד פתרונות

במקרה (א), במקום לחלק בגורם המשותף – כדאי להוציא אותו מחוץ לסוגריים.

במקרה (ב), להשתמש בנוסחה $\sqrt{a^2}=|a|$.

במקרה (ג), הזהות $\log_a x^2=2\log_a|x|$ שומרת על תחום ההגדרה.

הזהות $\log_a xy=\log_a|x|+\log_a|y|$ מגדילה את תחום ההגדרה, ועלולה להביא לשורש זר, שקל יותר "לתפוס".

הערה

שימוש בנוסחאות טריגונומטריות, ובעיקר באלה שכוללות $\operatorname{tg}x$ ו- $\operatorname{ctg}x$ – יכולות לשנות את תחום ההגדרה של המשוואה באופן משמעותי.

למשל, בנוסחה $\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}$ הקשר בין תחומי ההגדרה של אגף שמאל ואגף ימין אינו טריוויאלי.

4. דוגמאות לפתרון במצבים שדנו בהם בפרק 3

תרגיל 4.1

$$\sqrt{x}+x=2 \qquad \text{(F)}$$

תחום הגדרה: $D_F=\{x\geq 0\}$

אז למה פתרון חיובי $x=4$ הוא זר?

הסיבה היא, כי במשוואה חוקית $\sqrt{x}=2-x$, צד שמאל הוא אי-שלילי, ומכאן נובעת הגבלה נוספת: $2-x\geq 0$, כלומר $x\leq 2$. כשמעלים את שני האגפים בריבוע, מתבטלת ההגבלה.

תרגיל 4.2

$$\frac{x^2-10x+1}{x-7}+x=11 \qquad (F)$$

$$D_F=\{x\neq 7\}$$

השורש $x=7$ שקיבלנו – לא שייך לתחום ההגדרה, ולכן המשוואה סותרת.

תרגיל 4.3

$$\log_2(x-3)^2=2 \qquad (F_1) \qquad\qquad D_{F_1}=\{x\neq 3\}$$

המשוואה שקולה למשוואה: $\qquad 2\log_2|x-3|=2 \qquad (F_2)$

$$\log_2|x-3|=1$$

$$|x-3|=2$$

לכן $x_1=5\ ,\ x_2=1$.

ברצוני לתת עוד מספר דוגמאות לא-טריוויאליות:

דוגמה 4.1

$$\log(2x-2)^2-\log(x+3)^2=2 \qquad (F)$$

$$D_F=\{x\neq -3\ ,\ x\neq 1\}$$

אם נפתור את המשוואה בדרך מקובלת, תחום ההגדרה ישתנה.
מעניין לעקוב אחריו:

$$2\log(2x-2)-2\log(x+3)=2 \quad /:2 \qquad (F_1)$$

$$D_{F_1}=\{x>1\}$$

$$\log\frac{2x-2}{x+3}=1 \qquad (F_2)$$

$$D_{F_2}=\{x<-3 \quad \text{או} \quad x>1\}$$

רואים, כי $D_{F_1} \subset D_{F_2} \subset D_F$.

השורש, שמוצאים בדרך זו, הוא $x=-4$.

האם לא איבדנו שורשים, כי תחום ההגדרה מצטמצם?

אכן, הפתרון הנכון הוא הפתרון הבא:

$$(F_3) \qquad 2\log|2x-2| - 2\log|x+3| = 2$$

$$D_{F_3} = D_F$$

$$(F_4) \qquad \log\frac{|2x-2|}{|x+3|} = 1$$

$$D_{F_4} = D_F$$

$$\frac{|2x-2|}{|x+3|} = 10$$

$$|2x-2| = 10|x+3|$$

והנה מצאנו גם את השורש השני: $x_1 = -4 \ , \ x_2 = -\frac{7}{3}$.

מקובל לדרוש מתלמידים לעשות בדיקת פתרונות של משוואות אי-רציונליות וטריגונומטריות. כך אפשר "לתפוס" שורש זר, אבל כפי שראינו, אם לא נעקוב אחרי תחום ההגדרה, אפשר גם לאבד פתרונות.

דוגמה 4.2 (קופרמן, 1996)

$$(F) \qquad \operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 2\operatorname{ctg}x - 1$$

$D_F = \{x \neq \pi k \ , \ x \neq \frac{\pi}{4} + \pi k$,מספר שלם $k\}$

טרנספורמציה זהותית פשוטה, $\operatorname{ctg}x = \frac{1}{\operatorname{tg}x}$, מצמצמת את תחום ההגדרה של המשוואה:

$$(F_1) \qquad \frac{\operatorname{tg}x + 1}{1 - \operatorname{tg}x} = \frac{2}{\operatorname{tg}x} - 1$$

$D_{F_1} = \{x \neq \pi k \ , \ x \neq \frac{\pi}{4} + \pi k \ , \ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, מספר שלם $k\}$

נציב $t = \operatorname{tg} x$: $\frac{t+1}{1-t} = \frac{2}{t} - 1$

$$t = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi k$$

כדי לא לאבד פתרונות בגלל צמצום תחום ההגדרה – נבדוק, אם בקבוצה $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

יש פתרונות של המשוואה.

נציב $x = \frac{\pi}{2}$ במשוואה המקורית:

$$\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} \stackrel{?}{=} 2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} - 1$$

$$-1 = 0 - 1$$

הנ"ל עבור $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, k מספר שלם.

אז לקבוצת פתרונות x_1 מצטרפת קבוצת פתרונות $x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi k$.

סיכום

במאמר נגענו בשני אספקטים של בעיות מעבָר ממשוואה למשוואה שקולה.

הראשון קובע אילו פעולות אפשר לבצע עם המשוואה כדי לעבור למשוואה שקולה, שקל יותר לפתור.

האספקט הזה, פחות או יותר, מוכר למורים, לפחות באופן אינטואיטיבי.

את האספקט השני בדרך כלל לא מדגישים. העיקרון הוא, שכאשר במעבָר משתמשים בטרנספורמציות זהותיות, הן יכולות לשנות את תחום ההגדרה של המשוואה, ואז נקבל משוואה לא שקולה.

הסיבה היא, שכל זהות נכונה עבור תחום הגדרה – משותף לשני צדי הזהות.

כשמחליפים צד אחד של הזהות בצד השני, מתעלמים בדרך כלל מהשינויים בתחום ההגדרה – דבר שגורם לטעויות.

פתרון משוואה עם מעקב אחרי תחום ההגדרה – מועיל גם להבנה עמוקה של תכונות הפונקציה המופיעה במשוואה.

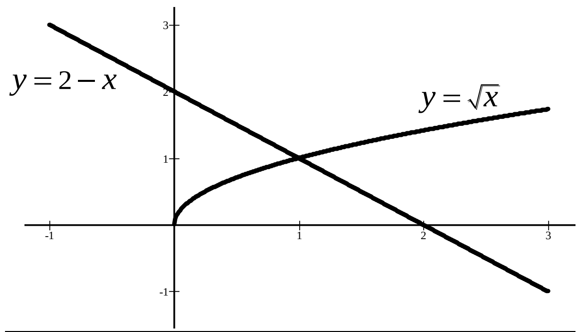
דרך מומלצת לבדיקת שקילות המשוואות היא בנייה גרפית של שני צדי המשוואה בעזרת תָּכנות חדשניות, למשל Geogebra, לפחות לבדיקת מספר השורשים בתשובה.

אני מקווה שהמאמר יעזור למורים בנושא מרכזי של אלגברה – פתרון משוואות.

בְּתָכְנִיתִי להמשיך בחקירה עבור מערכות של משוואות, אי-שוויונים ומערכות אי-שוויונים.

נספח

נחזור לתרגיל 4.1 : $\sqrt{x}+x=2$, שבפתרונו קיבלנו שורש זר, ונשרטט גרפים של הפונקציות $y=\sqrt{x}$ ו- $y=2-x$. הגרפים נחתכים רק בנקודה אחת.



רשימת מקורות

חייט, א' (2005). ביטויים אלגבריים וטיפול בהם : בהקשר פתרון משוואות ואי-שוויונים. **על"ה, 34**, 64-69.

קופרמן, א' (1996). **הרצאות שהוצגו בהשתלמות מורים בטכניון**. חיפה : הטכניון.

Attorps, I., & Tossavainen, T. (2009). On the equivalence relation in students' concept image of equation. In C. Bergsten, B. Grevholm, & T. Lingefjärd (Eds.), **Perspectives on Mathematical Knowledge: Proceedings of MADIF6, The 6th Swedish Mathematics Education Research Seminar Stockholm, January 29-30, 2008** (pp. 118-119). Linköping: LiU-Tryck. Retrieved from http://www.mai.liu.se/SMDF/madif6/AttorpsTossavainen.pdf

Bruce, R. E. (1931). Equivalence of equations in one unknown. **The Mathematics Teacher, 24**(4), 238-244.

Kreynin Y. L. (1994). **Equivalence transformations: Forsets of equations Education Committee of Serpuhov**. Russia.

Steinberg, R. M., Sleeman, D. H., & Ktorza, D. (1991). Algebra Students' Knowledge of Equivalence of Equations. **Journal for Research in Mathematics Education, 22**(2), 112-121.