משה סטופל
ויקטור אוקסמן

# בניות הנדסיות ככלי לפיתוח החשיבה והיצירתיות

## תקציר

*בניות הנדסיות מהוות אמצעי עזר לפיתוח החשיבה והיצירתיות של תלמידים. במאמר זה, הובאו 24 בעיות בנייה, חלקן הגדול עם פתרונות מלאים.*

*הבעיות מסווגות לשלוש קבוצות:*

*1. בניות בעזרת מחוגה בלבד.*

*2. בניות בעזרת סרגל ומחוגה.*

*3. בניות בעזרת סרגל בלבד.*

*הגבלת הבניות למחוגה בלבד או לסרגל בלבד, מגבירה את קושי הבעיות ומאלצת את התלמידים למצוא פתרונות ייחודיים, בלתי-שגרתיים ובכך גורמת להבלטת יופייה של המתמטיקה ותרומתה לפיתוח החשיבה.*

*כתיבה, חיבור ופתרון בעיות בנייה עם מגבלות שימוש בכלי בנייה, מהווה אתגר בפני מורים ותלמידים.*

## מבוא

מקובל לראות במתמטיקה כדרך מובהקת להקניה ופיתוח של חשיבה לוגית, אינטואיציה, הסקה, הכללה, ניתוח ובדיקת פתרונות.

לאורך שנים שימשה הנדסת המישור כאחד מהענפים המרכזיים של לימודי המתמטיקה להשגת המטרות הנ"ל. בשנים האחרונות ירד משקלה היחסי של הנדסת המישור בתוכנית הלימודים, בעיקר לתלמידים ברמות נמוכות. כתוצאה מכך, לא מתממש הפוטנציאל של תחום למידה זה שהוא במהותו לימוד מובנה.

תת-ענף של הנדסת מישור, הוא הנושא של בניות הנדסיות שיש בו את היכולת לעורר את החשיבה, לפתח יצירתיות ומקוריות בדרכי הפתרון, ולשלב פתרונות מקוריים, תוך פיתוח אסטרטגיות ייחודיות.

מאמר זה מביא לקט בניות הנדסיות, רובן לא קונבנציונליות, שממבט ראשון נראות כבלתי-פתירות, אך, עם הדרכה ורמזים ניתן להבליט את יופיה של המתמטיקה ותרומתה לפיתוח החשיבה.

חלק נכבד מהבניות כולל את המגבלה של שימוש בסרגל בלבד (סרגל חסר שנתות המאפשר

**תארנים:** *הנדסה; אמצעי עזר להוראה; חשיבה*

העברת קווים בלבד). בצורה מדורגת ראוי לאפשר בשלב ראשון את בצוען של הבניות בעזרת סרגל ומחוגה ובשלב השני ללא השימוש במחוגה, מגבלה המעלה משמעותית את הקושי של המשימה.

מהבחינה הדידקטית יש תחילה לחזק את מיומנות השימוש בבניות יסוד כגון: חציית קטע או זווית, הורדת אנך לישר מנקודה נתונה, בניית המקום הגיאומטרי שממנו רואים קטע בזווית נתונה וכו'. להעשרה הוצגו גם בעיות בהן נדרש שימוש במחוגה בלבד.

מכל מקום, יש להרגיל את התלמידים לצטט בכל שלב את המשפט עליו הם מסתמכים וזאת בעיקר לצורך בקרה ומניעת קבלת פתרונות שגויים.

הנושא בכללו הוצג בכנס מורים למתמטיקה (1) וזכה להתעניינות רבה.

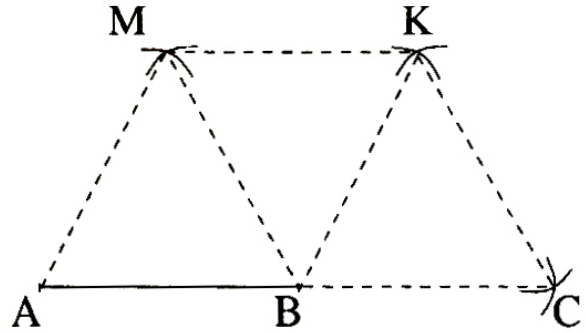
מספר היבטים של התחום נבדקו במסגרות לימודיות שונות ונמצא שאכן קיימת תרומה ממשית לפיתוח החשיבה.

כתיבה וחיבור בעיות בנייה, אף היא אתגר בפני המורים והתלמידים.

## דוגמאות

## א. בניות בעזרת מחוגה בלבד

קבוצה בולטת של בניות הנדסיות היא קבוצת הבניות בעזרת מחוגה בלבד. מאחר שבעזרת מחוגה ניתן לבנות מעגל בלבד או חלק ממנו (קשת), הרי שבמקרה זה מדובר בדרך כלל על בניית נקודות בעלות תכונה מסוימת.




ציור מס' 1

**תרגיל מס' 1**

על המשך קטע AB (ציור מס' 1) יש לבנות בעזרת מחוגה בלבד, את הנקודה C כך ש- AC=2AB(כלומר יש להכפיל את הקטע הנתון).

**תאור הבנייה**

מהנקודות A ו-B בונים קשתות בעלות רדיוס AB הנחתכות בנקודה M (MA=MB), באותו אופן ועם אותו רדיוס בונים קשתות מהנקודות B ו-M הנחתכות בנקודה K. כלומר AMKB הוא מעוין (שזוויותיו החדות בנות 60°) מאחר ו- AB=AM=MK=KB. מהנקודות B ו-K ממשיכים להעביר קשתות שוות רדיוס AB הנחתכות בנקודה C. בקלות ניתן להוכיח ש- AB=BC , זאת אומרת, AC=2AB כשהנקודה C נמצאת על המשך הישר AB.

בצורה דומה, ניתן לבנות נקודה C כך ש-AC=n·AB, כלומר להאריך קטע נתון פי n פעמים.

**תרגיל מס' 2**

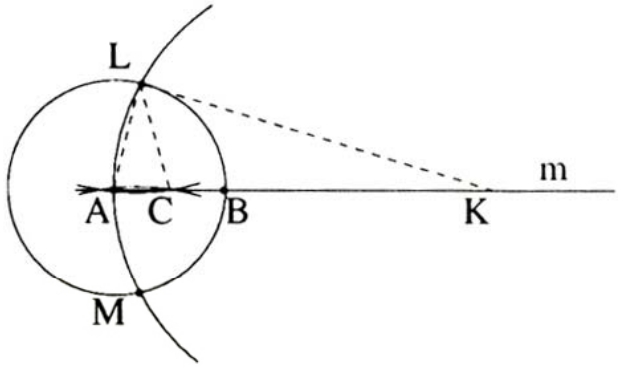
על ישר m נתון קטע AB . יש לבנות נקודה C כך ש-AC= $\frac{1}{n}$ ·AB , זאת אומרת יש למצוא את חלקו ה- n י' של קטע נתון.

### תאור הבנייה

בעזרת ציור מס' 2, נתאר את הבנייה.

בונים תחילה את נקודה K על המשך הישר AB כך ש - $AK=n\cdot AB$ , דהינו , $AB = \frac{1}{n}AK$ .

הבנייה נעשית ע"י העתקת ערכו של AB, n פעמים, באמצעות המחוגה או בעזרת תאור הבנייה של תרגיל מס' 1.




ציור מס' 2

מהנקודה A כמרכז ,חגים מעגל שרדיוסו AB ומהנקודה K חגים מעל שרדיוסו KA. המעגלים נחתכים בנקודות L ו-M. מנקודות אלו, שהן סימטריות ביחס לישר m, חגים קשתות שרדיוסן LA. קשתות אלו נחתכות בנקודות A ו-C והקטע המתקבל AC אורכו $\frac{1}{n}AB$ .

### הוכחת הבנייה

$\Delta ALC \sim \Delta AKL$ מהנימוק שזווית A היא זווית בסיס משותפת לשני המשולשים שהם שווי-שוקיים. מדמיון המשולשים מתקבל:

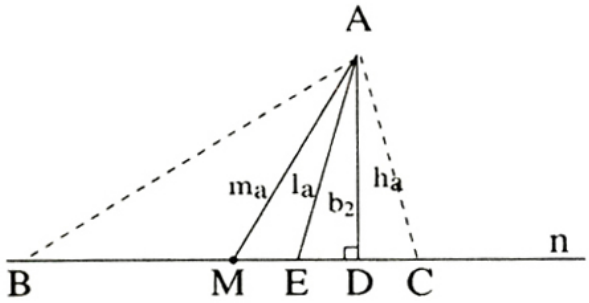
$\frac{AC}{AL}=\frac{AL}{AK}$ מאחר $AL=AB$ מקבלים: $\frac{AC}{AL}=\frac{AL}{AK}=\frac{1}{n}$

או בצורה מפורשת: $AC=\frac{1}{n}\cdot AB$

## ב. בנייה בעזרת סרגל ומחוגה

### דוגמא מס' 3

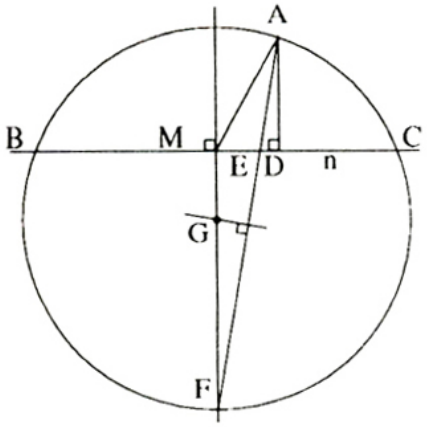
בעזרת סרגל ומחוגה יש לבנות משולש על פי אורכי הגובה, התיכון וחוצה הזווית היוצאים מאותה נקודה.




ציור מס' 3

### תאור הבנייה

בניית המשולש ADM ובתוכו הקטע AE פשוטה ביותר. על ישר n (כנראה בציור מס' 3) בונים בנקודה D גובה ומקצים עליו את הארוך ha ומתקבלת הנקודה A. מנקודה זו מקצים את הקטעים $l_a$ ו-$m_a$ ומתקבלות הנקודות E ו-M. הקושי כעת הוא למצוא את הקודקודים B ו-C. בעזרת המחוגה בונים אנך מנקודה M (ציור מס' 4) שהמשכו של AE (חוצה הזווית) חותך אותו בנקודה F. ניתן בקלות להוכיח שהנקודה F

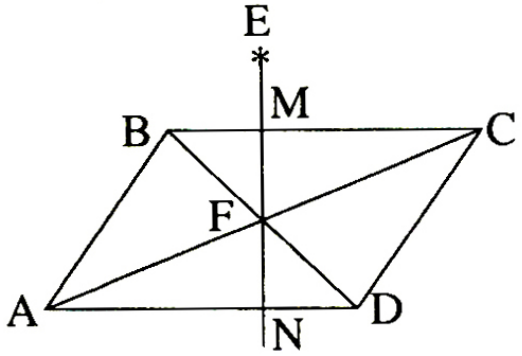



ציור מס' 4

נמצא על המעגל החוסם של המשולש המבוקש. כלומר, AF הוא מיתר במעגל החוסם ואילו האנך שנבנה בנקודה M (הישר MF) הוא אנך אמצעי למיתר, דהינו, שהוא קוטר במעגל החובם. כעת בונים אנך אמצעי למיתר AF (שוב קוטר) ושני הקטרים נפגשים בנקודה G, שהיא מרכז המעגל החוסם. חגים את המעגל שמרכזו בנקודה G ורדיוסו AG ומתקבלות הנקודות B ו-C.

## ג. בניות בעזרת סרגל בלבד

בסוג זה של בעיות בנייה, הסרגל משמש להעברת קו-ישר בין שתי נקודות. הקו הישר חותך ישר אחר או קשת ומתקבלות נקודות נוספות בדרך אל הפתרון. פתרון הבעיה מסתמך על משפטים פשוטים בהנדסת מישור, שבדרך כלל מוכרים לתלמידים ובמידת הצורך ניתנים להוכחה על-ידם. בתרגילים אלו, בשלב ראשון כדאי לנסות ולבצע את הבנייה בעזרת סרגל ומחוגה ולאחר מכן בעזרת סרגל בלבד. מקורות לחלק מבניות אלו מופיעים ביבליוגרפיה (2-7).



ציור מס' 5

### תרגיל מס' 4

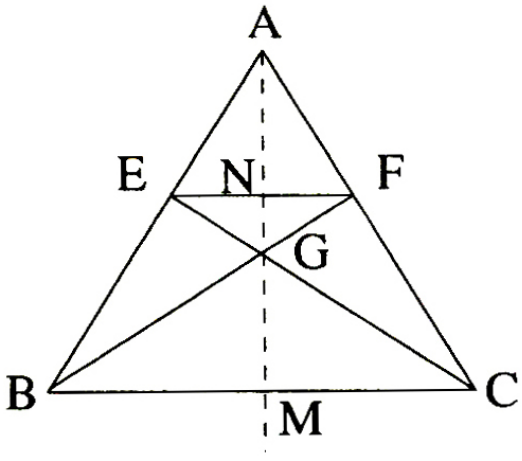
נתונה מקבילית ABCD ונקודה כלשהי E מחוצה לה (ציור מס' 5). יש להעביר קו יש דרך הנקודה E שיחלק את שטח המקבילית לשני חלקים שווי-שטח. הערה: בדרך הפתרון מותר להעביר יותר מאשר קו אחד.

### תאור הבנייה

מעבירים את האלכסונים BD ו-CA הנחתכים בנקודה F. מעבירים את הישר המחבר את הנקודות E עם F. ישר זה חותך את צלע המקבילית בנקודה M והמשכו את הצלע הנגדית בנקודה N. הישר MN הוא הישר המחלק את שטח המקבילית לשני חלקים שווי-שטח ובנוסף לכך גם לחלקים שווי-צורה (חופפים.) ההוכחה במקרה זה, פשוטה ביותר, ומסתמכת על חפיפת משולשים ותכונות האלכסונים של מקבילית.

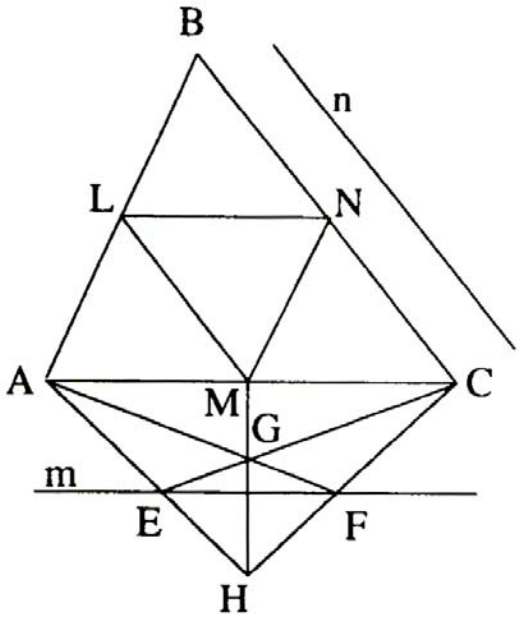
### תרגיל מס' 5

נתון משולש ABC ובו הקטע EF המקביל לבסיס AB והחותך את שוקיו בנקודות F ו-E (ציור מס' 6). בעזרת סרגל בלבד יש למצוא את נקודות האמצע של הקטעים BC ו-EF. פתרון הבעיה מסתמך על משפט שאינו מוכר למרבית התלמידים: "הישר המחבר את נקודות החיתוך של אלכסוני הטרפז עם נקודת החיתוך של המשכי השוקיים חוצה את בסיס הטרפז". ההוכחה של משפט זה מסתמכת על דמיון משולשים וניתן למצוא אותה במאמר קודם (2).



ציור מס' 6

בהתאם למשפט זה, מעבירים את האלכסונים EC ו-FB ומתקבלת נקודת הדיר־תוך שלהם G. הישר AG והמשכו חותכים את הקטעים BC ו-EF בנקודות האמצע שלהם, M ו-N בהתאמה.




ציור מס' 7

**תרגיל מס' 6**

נתונה מקבילית. בעזרת סרגל בלבד יש למצוא את נקודות האמצע של הצלעות. פתרון הבעיה מסתמך על המשפט שצוטט ועל תאור הבנייה של התרגיל הקודם וזאת ע"י המשכת 2 מצלעות המקבילית ויצירת משולש חיצוני.

**תרגיל מס' 7**

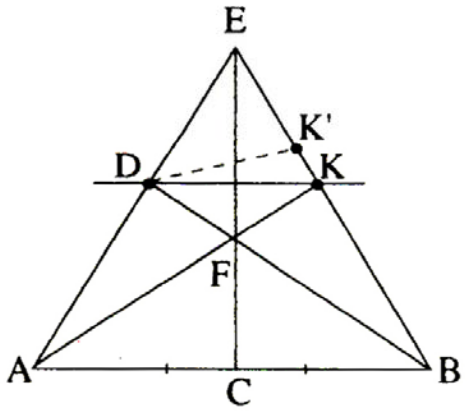
נתון משולש כלשהו ABC ונתונים הישרים m ו-n המקבילים לשתי צלעות שלו. יש להעביר בעזרת סרגל בלבד את שלשת הקטעים האמצעיים של המשולש הנתון (ציור מס' 7).

**תאור הבנייה**

בוחרים נקודות E ו-F על הישר המקביל m. מחברים את E עם A ואת F עם C ומתקבל טרפז. מעבירים בטרפז את האלכסונים CE ו-FA הנחתכים בנקודה G וממשיכים את השוקיים עד למפגשן בנקודה H. המשך הישר GH חותך את הצלע AC בנקודה M שהיא האמצע שלה, בהתאם למשפט שצוטט בתרגיל 5. באותה צורה מקבלים את הנקודה N שהיא אמצע הצלע BC. הישר MN הוא קטע אמצעים במשולש ולכן הוא מקביל לצלע AB. בעזרתו ניתן באותה צורה לחצות את הקטע AB ולקבל את הנקודה L.

**תרגיל מס' 8**

נתון קטע AB ונתונה נקודת האמצע שלו C. יש להעביר דרך נקודה כלשהי D ישר המקביל ל-AB.




ציור מס' 8

**תאור הבנייה**

מעבירים את הישרים AD ו-BD , כנראה בציור מס' 8. מסמנים נקודה כלשהי E על המשך AD.

מעבירים את הישרים BE ו-CE. מסמנים ב-F את נקודת החיתוך של הישרים CE ו-BD.

מעבירים את הישר AF שהמשכו חותך את הישר BE בנקודה K. הישר DK הוא הישר המבוקש, דהינו, $AB \parallel DK$.

## הוכחת הבנייה

הוכחת דרך הבנייה תעשה בדרך השלילה. נניח שהישר DK איננו מקביל ל-AB. נעביר DK' מקביל ל-AB, כלומר DK' ∥ AB כאשר נקודה K' נמצאת על BE (ציור מס' 8). המרובע ADK'B הוא טרפז. לכן הישר CE עובר דרך נקודת המפגש של אלכסוניו (כי C נקודת האמצע של AB) . אבל הנקודה F היא נקודת המפגש של BD ו-CE לכן האלכסון השני AK', גם הוא חייב לעבור דרך הנקודה F. זאת אומרת הישרים AK ו-AK' מתלכדים והנקודה K' ו-K מתלכדות, ומכאן נובע DK ∥ AB, מש"ל.

על סמך דרך הבנייה של תרגילים 6-8 מסוגלים התלמידים לפתור מספר בעיות דומות:

### תרגיל מס' 9

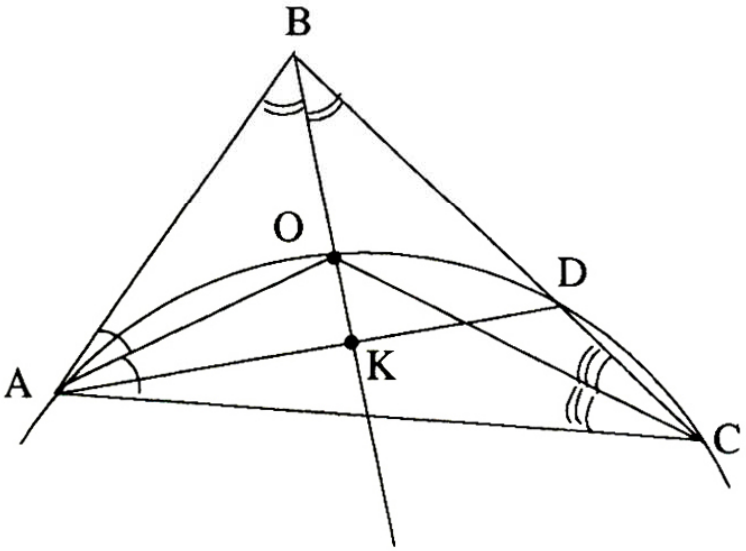
נתונים שני קווים ישרים מקבילים וקטע מסוים על אחד מהם. צריך למצוא את נקודת האמצע שלו על-ידי בנייה בעזרת סרגל בלבד.

### תרגיל מס' 10

נתונים שני קווים ישרים מקבילים. דרך נקודה כלשהי, שאינה נמצאת על הישרים הללו, ישר להעביר קו ישר המקביל להם.

### תרגיל מס' 11

נתון משולש כלשהו ABC. נתונה נקודת המפגש של חוצי הזווית שלו O, וכן המעגל העובר דרך נקודה זו ודרך שני קודקודיו C, A. יש לבנות בעזרת סרגל בלבד את המשיק למעגל בנקודה O. הערה: מרכז המעגל של הקשת $\overset{\frown}{AOC}$ איננו נתון (ציור מס' 9).



ציור מס' 9

## הוכחת דרך הפתרון

נסמן ב-D את נקודת החיתוך השנייה (בנוסף לנקודה C) של המעגל עם הצלע BC (או עם המשכה). במקרה שהנקודה D מתלכדת עם נקודה C (זאת אומרת ש-BC משיק למעגל) מספיק להתבונן בנקודה C בלבד.

נוכיח ש-BO ⊥ AD. לצורך זה נסמן ב-K את נקודת החיתוך של AD עם המשך BO, ונערוך חישובי זוויות:

1. $\measuredangle AOC = \measuredangle ADC$ (זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת)
2. $\measuredangle AOC = 180^0 - (\frac{1}{2}\measuredangle A + \frac{1}{2}\measuredangle C) =$

$$180^0 - \frac{1}{2}(180^0 - \measuredangle B) = 90^0 + \frac{1}{2}\measuredangle B$$

מ-(1) ו-(2) נובע:

$$\measuredangle ADC = 90^0 + \frac{1}{2}\measuredangle B \qquad .3$$

אבל $\measuredangle ADC$ היא זווית חיצונית למשולש ADB ולכן:

$$\measuredangle ADC = \measuredangle B + \measuredangle BAK \qquad .4$$

כלומר:

$$90^0 + \frac{1}{2}\measuredangle B = \measuredangle B + \measuredangle BAK \qquad .5$$

מקשר זה נובע:

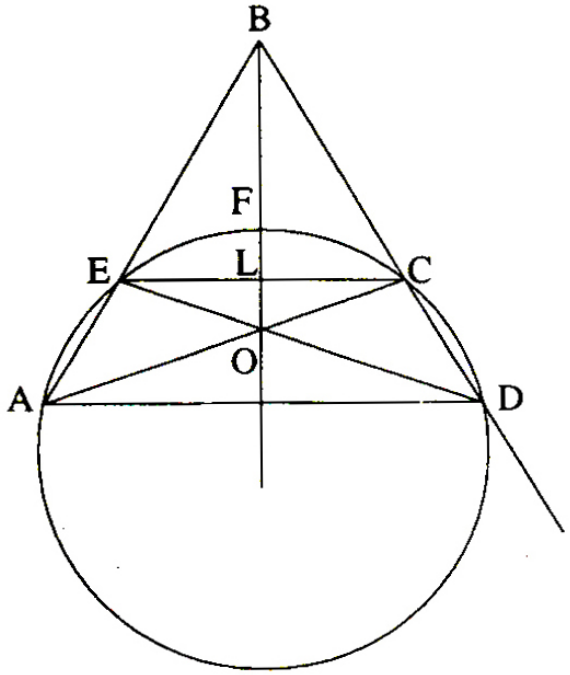
$$\measuredangle BAK + \frac{1}{2}\measuredangle B = 90^0 \qquad .6$$

ולכן הזווית השלישית במשולש ABK היא בת $90^\circ$ דהינו, $AD \perp BK$.

כלומר חוצה הזווית BK במשולש ABD הוא גם גובה ולכן הוא גם תיכון, כלומר AK=KD (משולש ABD הוא משולש ש"ש).

AD הוא מיתר במעגל ו-BK הוא אנך אמצעי למיתר זה ולכן מרכז המעגל נמצא על נמשכו של ישר זה.

כדי לבנות את המשיק יש לבנות מקביל ל-AD העובר בנקודה O, ובנייה כזאת כבר נעשתה בתרגיל 8: בנייה קו מקביל, דרך נקודה כלשהי, לקטע שנקודת האמצע שלו נתונה.




ציור מס' 10

## תרגיל מספר 12

נתון משולש ABC והמעגל העובר דרך שני קודקודיו A ו-C ודרך נקודת המפגש של חוצי הזווית שלו שאינו משיק ל-AB ו-AC (נקודת המפגש של חוצי הזווית ומרכז המעגל אינם נתונים). יש לבנות בעזרת סרגל בלבד את נקודת המפגש של חוצי הזווית.

## ניתוח דרך הפתרון

כבתרגיל 11 הדומה לתרגיל זה, נעשה תחילה חישוב זוויות, בהתייחס לציור מס' 10.

נסמן ב-E את נקודת החיתוך של הצלע AB עם קשת המעגל וב-D את נקודת החיתוך של המשך הצלע BC עם המעגל. נחבר את הנקודות E ו-C, ואת נקודות D עם A. נניח שהנקודה F הנמצאת על קשת המעגל בין הנקודות E ו-C היא נקודת המפגש של חוצי הזווית.

.1 $\measuredangle AFC = 180^0 - \frac{1}{2}(\measuredangle BAC + \measuredangle BCA) = 90^0 + \frac{1}{2}\measuredangle ABC$

משוויון זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת נובע:

.2 $\measuredangle AEC = \measuredangle AFC = 90^0 + \frac{1}{2}\measuredangle ABC = \measuredangle ABC + \measuredangle BCE$

מזה נובע:

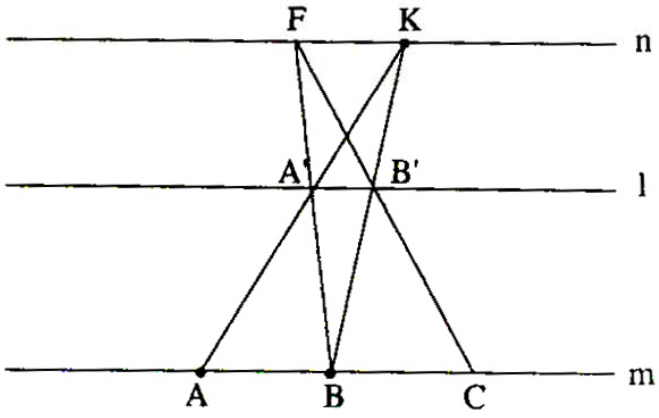
.3 $\measuredangle BCE = 90^0 - \frac{1}{2}\measuredangle ABC$

כלומר הזווית השלישית במשולש BLC (L נקודת החיתוך של חוצה זווית B עם המיתר EC) היא בת $90^\circ$, דהינו, $BL \perp EC$. מאחר ש-BL הוא חוצה זווית וגם אנך במשולש BEC, נובע מכך שמשולש זה ש"ש, ולכן, BL הוא גם תיכון.

בעזרת הפיפת משולשים אפשר להראות ש- $AD \perp BL$, שמשמעו, $AD \parallel EC$, כלומר, AECD - טרפז. מתרגיל מס' 5 ידוע שבטרפז, נקודת מפגש האלכסונים O והקדקוד B נמצאות על הישר החוצה את בסיסיו EL ו-AD.

## תאור הבנייה

בעזרת סרגל מעבירים את הישר ED החותך את צלע המשולש AC בנקודה O. מחברים את O עם B ונקודת החיתוך F של הישר עם הקשת EC, היא נקודת המפגש של חוצי הזווית.



ציור מס' 11

## תרגיל מס' 13

נתונים שני ישרים מקבילים וקטע נתון על אחד מהם. יש להגדיל קטע זה פי 2.

## תאור הבנייה

נתונים הישרים המקבילים l ו-m, על האחרון נתון הקטע AB שאותו יש להגדיל פי 2 (ציור מס' 11). תהא הנקודה K נקודה כלשהי מחוץ לקווים הנתונים. דרך הנקודה K נעביר ישר n המקביל לשני הישרים הנתונים (פתרון תרגיל מס' 9).

מעבירים את הישרים AK ו-KB ומתקבלות נקודות החינוך שלהם, 'A ו-'B עם הישר l. מעבירים את הישר A'B שהמשכו חותך את הישר n בנקודה F. כעת מעבירים את הישר 'FB והמשכו חותך את הישר m בנקודה C. הקטעים AB ו-BC שווים ובכך הגדלנו את הקטע הנתון פי 2. לפי אותו עקרון ניתן להגדיל את אורכו של הקטע פי n פעמים.

## הוכחת הבנייה

.1 $\Delta A'FB' \sim \Delta BFC \Rightarrow \frac{A'B'}{BC} = \frac{A'F}{BF}$

.2 $\Delta A'KB' \sim \Delta AKB \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{KA'}{KA}$

.3 $\Delta FA'K \sim \Delta BA'A \Rightarrow \frac{A'F}{A'B} = \frac{A'K}{A'A}$

נוסיף 1 לכל אחד מאגפי שיוויון (3)

$$\frac{A'F}{A'B} + 1 = \frac{A'K}{A'A} + 1$$

.4 $\frac{A'F + A'B}{A'B} = \frac{A'K + A'A}{A'A} \Rightarrow \frac{FB}{A'B} = \frac{KA}{A'A}$

שינוי אגפים בשיוויון (4) נותן:

.5 $\frac{FB}{KA} = \frac{A'B}{A'A}$

שינוי אגפים בשיוויון (3) נותן:

.6 $\frac{A'F}{A'K} = \frac{A'B}{A'A}$

משוויונים (5) ו-(6) נובע

.7 $\frac{FB}{KA} = \frac{A'F}{A'K}$

שינוי אגפים בשיוויון זה נותן:

.8 $\frac{A'F}{FB} = \frac{A'K}{KA}$

שיוויון (8) יחד עם שוויונים (1) ו-(2) נותן:

.9 $\frac{A'B'}{BC} = \frac{A'B'}{AB}$ דהינו, AB=BC מ.ש.ל

בדוגמאות, תרגילים מס' 14-17, הבאות הניתנות לעבודה עצמית נתון מעגל עם מרכזו וצריך לבנות בעזרת סרגל בלבד את הבניות הבאות:

**תרגיל מס' 14**
לבנות מלבן כלשהו.

**תרגיל מס' 15**
רבוע כלשהו.

**תרגיל מס' 16**

הורדת אנך מנקודה כלשהי על ישר נתון.

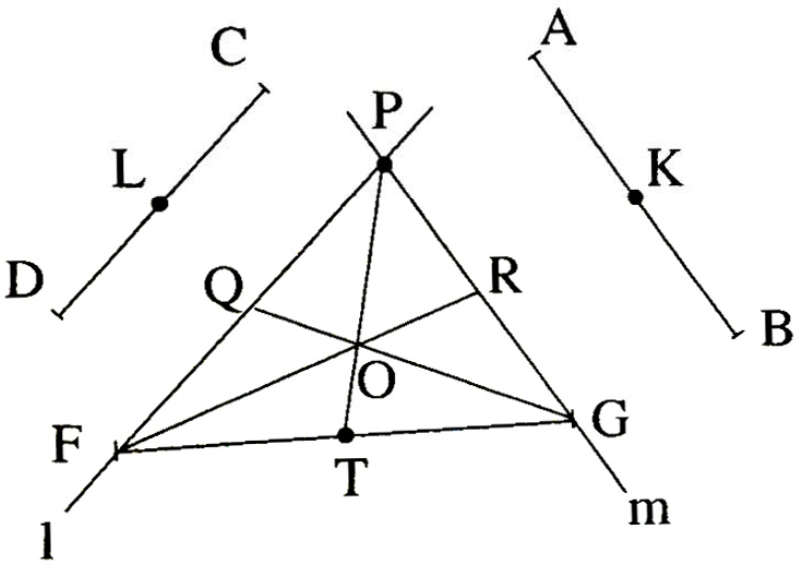
**תרגיל מס' 17**

נתון קטע AB וכן קו ישר l עליו נקודה C. צריך לבנות נקודה D על הישר l כך ש-CD=AB.

כל הבעיות שהוצגו עד כה, מייצגות בעיות קלאסיות של הנושא. מתעוררת השאלה כיצד ניתן לגוון את הבעיות ומהי המטרה הדידקטית אותה שואפים להשיג.
מחד גיסא בעזרת סרגל בלבד ניתן לבנות מעט מאד ולכן מוסיפים לנתון צורה הנדסית כלשהי. מאידך, אם הצורה המוספת היא מעגל עם מרכז נתון, הרי כל בנייה שתידרש ניתן יהיה לבנות אותה בעזרת סרגל ומחוגה לפי המשפט שהוכח ע"י שטיינר (1796-1863): "כל בנייה, שאפשר לבצעה בעזרת סרגל ומחוגה, אפשר לבצעה בעזרת סרגל בלבד בתנאי שנתון מעגל ומרכזו", לכן כדאי להתבוננן במספר בעיות שבהן נתון מעגל אבל בלי מרכזו.

**תרגיל מס' 18**

נתונים שני קטעים AB ו-CD, שאינם מקבילים, ונקודות האמצע שלהם K ו-L בהתאמה. יש לקבוע בעזרת סרגל בלבד את נקודת האמצע של קטע שלישי FG (ציור מס' 12).



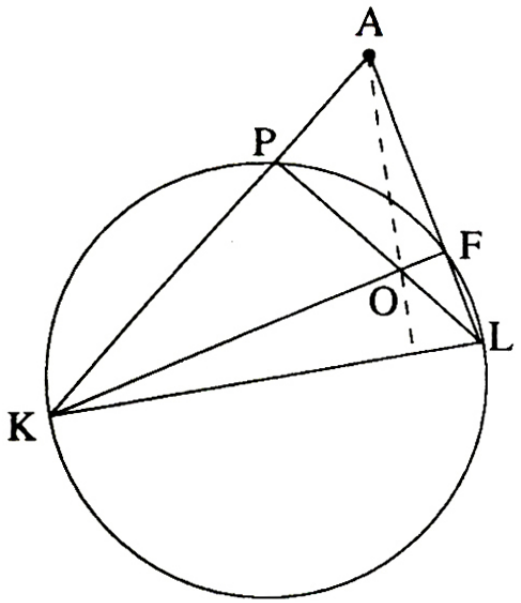

ציור מס' 12

**תאור הבנייה והוכחה**

אם הישר FG מקביל לאחד מהקטעים הנתונים הרי הפתרון מתקבל בקלות כנאמר בתרגיל מספר 5.
במידה והקטעים אינם מקבילים אפשר להעביר קו ישר l מקביל ל-CD דרך הנקודה F וכן קו ישר m מקביל ל-AB דרך הנקודה G כמתואר בתרגיל מספר 8. נסמן ב-P את נקודת החיתוך של הישרים m ו-l. לפי תרגיל מספר 5 ניתן למצוא את אמצעי הקטעים PG ו-PF. נסמן אותם ב-R ו-Q ונעביר את הישרים QG ו-FR שהם התיכונים של המשולש FPG. נקודת החיתוך שלהם O היא נקודת המפגש של תיכוני המשולש לכן המשך הישר PO חותך את הישר FG בנקודת האמצע שלו T.

**תרגיל מס' 19**

נתון מעגל ומסומן עליו קוטר (ללא ציון מרכז המעגל) ונקודה A שאינה נמצאת על המעגל. יש להוריד אנך מהנקודה A לקוטר או להמשכו.



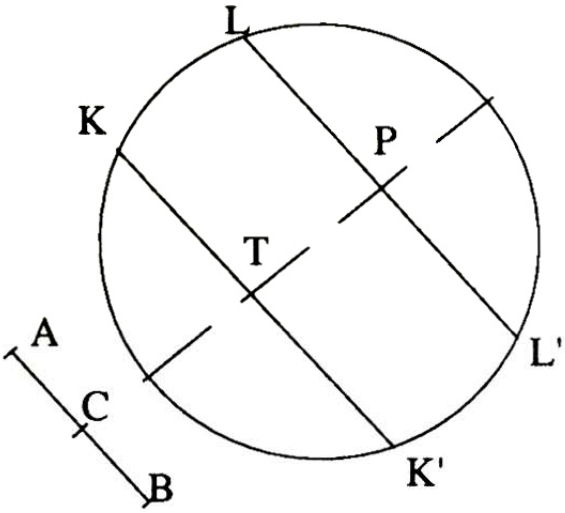

ציור מס' 13

## תאור הבנייה והוכחה

מחברים את הנקודה A עם נקודות K ו-L (קצות הקוטר), כנראה בציור מספר 13. הישרים KA ו-LA חותכים את המעגל בנקודות P ו-F בהתאמה. הזויות KPL ו-KFL, זוויות היקפיות הנשענות על קוטר ומשום כך הן ישרות. הישרים PL ו-FK - גבהים במשולש AKL, ונחתכים בנקודה O. הישר AO הוא הגובה השלישי במשולש וניצב לקוטר KL, כפי שנדרש בתרגיל.

## תרגיל מס' 20

נתון מעגל (ללא ציון מרכזו) וקטע AB עליו מסומנת נקודת האמצע שלו C. צריך לבנות את קוטר המעגל (ציור מס' 14).




ציור מס' 14

## תאור הבנייה

דרך שתי נקודות כלשהן על המעגל K ו-L, מעבירים את המיתרים LL' ו-KK' המקבילים לישר הנתון AB כמתואר בתרגיל 8 את נקודות האמצע P ו-T של מיתרים אלו מוצאים כנאמר בתרגיל 9. מחברים את נקודות P ו-T ומתקבל קוטר. את ההוכחה שהישר PT עובר דרך מרכז המעגל תלמידים חייבים לדעת!

## תרגיל מס' 21

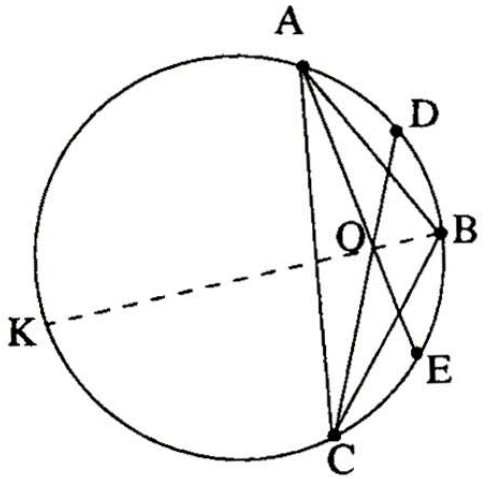
נתון מעגל (ללא ציון מרכזו) ושני קטעים AB ו-CD שאינם מקבילים. כמו-כן נתונות נקודות האמצע של הקטעים יש למצוא את מרכז המעגל.

## תאור הבנייה

לפי כל אחד מהקטעים בונים קוטר כבתרגיל מספר 20. נקודת החיתוך של הקטרים היא מרכז המעגל.

## תרגיל מס' 22

נתון מעגל (ללא ציון מרכזו) ושלוש נקודות כלשהן A,B,C עליו. כמו כן נתונות הנקודות D ו- E שהן נקודות האמצע של הקשתות AB ו-BC. יש למצוא את נקודת האמצע של הקשת AC (ציור מס' 15).



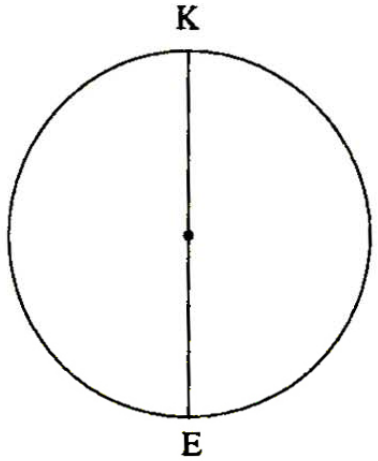
ציור מס' 15

## תאור בנייה והוכחה

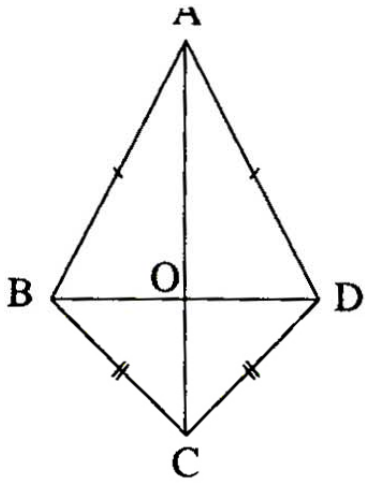
מעבירים את המיתרים AB, BC ו-AC. הישר DC חוצה את הזווית ACB וישר AE חוצה את הזווית BAC. שני חוצי הזווית נפגשים בנקודה O דרכה עובר גם חוצה הזווית השלישית של המשולש ABC ולכן המשכו חותך את קשת המעגל AC בנקודת האמצע שלה K.

## תרגיל מס' 23

נתון דלתון ABCD (AB=AD, CB=CD) ומעגל ללא ציון מרכזו. יש למצוא את מרכז המעגל ואת נקודת האמצע של האלכסון AC של הדלתון (ציורים 16 א', ב').



ציור מס' 16 ג'

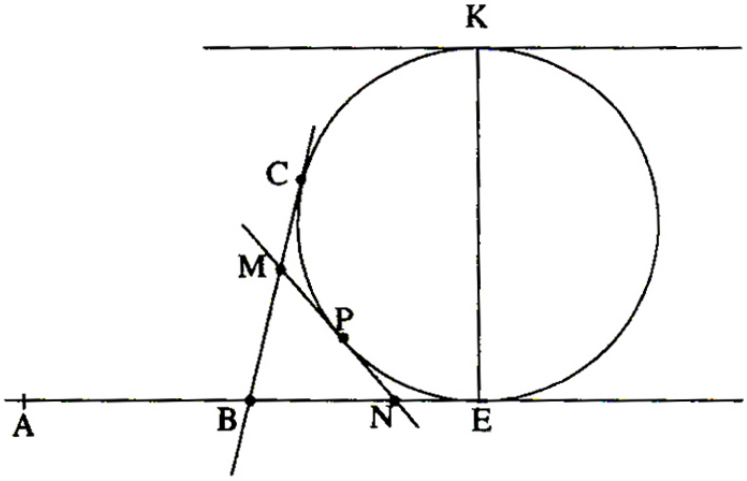


ציור מס' 16 א'

## תאור הבנייה

מעבירים את אלכסוני הדלתון AC ו-BC הנחתכים בנקודה O. מתכונות אלכסוני הדלתון: BO = OD ו-AC ⊥ BD - ומאחר שיש קטע BD עם נקודת האמצע שלו O, אז ניתן לבנות את הקוטר KE של המעגל המאונך לקטע זה. כלומר KE ∥ AC (כמתואר בתרגיל 20).

לפי המשפט של תרגיל 5 אפשר למצוא את אמצע הקוטר (מרכז המעגל) ואת האמצע של האלכסון AC.



ציור מס' 17

## תרגיל מס' 24

נתון מעגל בו מסומן קוטר (ללא ציון מרכזו). יש לבנות קטע כלשהו ומשולש כלשהו, כך שהיקפו ישווה לאורך הקטע (ציור מס' 17).

נניח ש-KE הוא הקוטר הנתון של המעגל. דרך הנקודות K ו-E מעבירים משיקים מקבילים למעגל כמתואר בתרגיל מס' 2

(במאמר מס' 2 שבמקורות). בוחרים נקודה כלשהי A על אחד המשיקים ומתקבל הקטע AE שאת נקודת האמצע שלו B ניתן למצוא בקלות.
מנקודה B ניתן להעביר את המשיק השני למעגל BC כמתואר בתרגיל מס' 1 (במאמר מס' 2 שבמקורות). על הקשת CE בוחרים נקודה כלשהי P ומעבירים דרכה את המשיק MN למעגל. היקפו של המשולש MBN שווה לאורך הקטע (המשיק) AE, לפי הפירוט הבא:
NE=NP, MP=CM (משיקים למעגל)
BM + MP + PN + BN = BC+ BE = 2BE = AE לפי שנקבע CB=BE.

## סיכום

במאמר הוצג מגוון רחב של בעיות בנייה, חלקן הגדול עם פתרונות מלאים. ניתן לסווג את הבניות לשלוש קבוצות:
1. בניות בעזרת מחוגה בלבד.
2. בניות בעזרת סרגל ומחוגה.
3. בניות בעזרת סרגל בלבד.

מהבחינה הדידקטית כדאי לבחור בעיות שפתרונן מתבסס על משפטים ועובדות גיאומטריות הנלמדות במסגרת תוכנית הלימודים. ומוכרות לתלמידים. יישום ידע שנרכש בלימוד קודם יתרום להטמעתו וחיזוקו. הצגת משפטי הנדסה בלתי-מוכרים, הדרושים לפתרון בעיות בנייה, מהווה הזדמנות להעשרת הידע של התלמידים. משפט כזה הובא במאמר ומספר תרגילים התבססו עליו.
לא הוצגו במאמר בעיות בנייה המסתמכות על "גיאומטריה תאורית", משום שהנושא איננו כלול בתוכנית הלימודים וקיים קושי מבחינת הרמה והידע הדרוש להבנתו. יחד עם זאת, ניתן ליישם בניות יסוד, המסתמכות על גיאומטריה תאורית (רשימת מקורות 6-2), לסוגי הבעיות שהוצגו במאמר הנוכחי.
בניות הנדסיות בעזרת מחוגה בלבד, או בעזרת סרגל בלבד, מאלצות את התלמידים ליישם ידע בצורה פעילה תוך סינטזה עם פתרונות ידועים ויכולת למיין בין פעולות אפשריות וכאלו שאינן.
הגבלת אמצעי הבנייה, מאלצת לחפש דרכי פתרון ייחודיות תוך יישום ידע ושימוש בעובדות בסיסיות מוכרות כגון: נקודות המפגש של גבהים, תיכונים וחוצי זווית במשולש, תכונות קטע אמצעים, נקודת המפגש של קטרים במעגל וכד'.
בעיות הבנייה מהוות אתגר למורים ולתלמידים שוחרי מתמטיקה הן מההיבט של פתרון והן מההיבט של חיבורן.

## מראי מקומות:


1. סטופל מ., אוקסמן ו., **"בניות חנדסיות בעזרת סרגל בלבד"**, במסגרת הכנס הארצי של "האגודה לקידום החינוך המתמטי בישראל", בולטין הכנס, בניני האומה, ירושלים, 1995.
2. סטופל מ., אוקסמן ו., **"בניות גיאומטריות על-ידי סרגל בלבד"**, על"ה 18, 1996.
3. סיגלר א., ב., **"בניית משיק למעגל (מרכז המעגל אינו נתון)"**, **"אתגר גיליונות מתמטיקה"**, המחלקה להוראת המדעים - טכניון, 15, 1989.
4. H.S.M. Coxeter, **Projective Geometry, University of Toronto Press,** 1974.
5. A.F. Hordam, **A Guide to Undergraduate Projective Geometry,** Pergamon Press Austrlia 1970.
6. P. Samuel, **Projective Geometry**, Springer-Verlag, N.Y. 1988.
7. A.S. Samogorghuriskii, **The Ruler in Geometrical Constructions,** Pergamon Press Oxford, 1961.