משה סטופל ודוד בן-חיים

יישום טכניקות ערך מוחלט בפתרון בעיות אותנטיות במתמטיקה

תקציר

ישנן לפחות חמש הגדרות שקולות של מושג הערך המוחלט:

במקרים, אשר המטלה בהם היא משוואה או אי-שוויון עם ביטוי בודד בערך מוחלט או עם שני ביטויים בערך מוחלט – הרי, מצד אחד, תהיה זו חוויה לימודית משמעותית ללומדים לפתור את המשימה על-ידי שימוש בכל אחת מההגדרות. מצד שני, אם מדובר ביותר משני ביטויים בערך מוחלט, ההגדרה השימושית ביותר היא ההגדרה, הכוללת פתרון באינטרוולים ובבדיקה בעזרת הנקודות הקריטיות (נקודות האפס של הביטויים בעלי ערך מוחלט).

למעשה, יישום הטכניקה היא אחת הסיבות מדוע נושא הערך המוחלט הוא חשוב במתמטיקה – בכלל, ובהוראת המתמטיקה – בפרט.

אנו מציגים כאן בעיה מעשית אותנטית, הנפתרת באמצעות ערכים מוחלטים ושיטת "האינטרוולים", ולאחר-מכן אנו מכלילים את הפתרון עם תוצאות מפתיעות.

הבעיה האותנטית מאפשרת גם חקירה באמצעות כלים לימודיים טכנולוגיים, כגון תכנת הגיאומטריה הדינמית GeoGebra: מורים למתמטיקה יכולים לאפשר לתלמידיהם להתמודד עם הבעיה בתחילה – באמצעות עבודה בסביבה אינדוקטיבית/טכנולוגית, אשר בה הם עורכים ניסויים וירטואליים עד לקבלת השערה מוצקה, ולאחר-מכן יהיה עליהם להוכיח את ההשערה באופן דדוקטיבי – באמצעות כלים תאורטיים קלסיים.

מילות מפתח: *הגדרת הערך המוחלט; שיטות פתרון של ערכים מוחלטים; בעיות אותנטיות; תכנת גיאומטריה דינמית; תכנת GeoGebra.*

1. מבוא

מושג הערך המוחלט הוא סימון מקוצר מקובל למצבים מתמטיים, המתמקדים במספרים חיוביים ושליליים. בהקשר אריתמטי – מושג הערך המוחלט אינו מציב בעיות משמעותיות או קשיים מיוחדים.

קשיים לגבי מושג הערך המוחלט – נוצרים בעת מעבר מהתחום האריתמטי לאלגברי, אשר מוצעות בו מספר הגדרות של מושג זה: למשל, ברומפיל (Brumfiel, 1980) מציע חמש הגדרות

שונות לערך המוחלט. הוא ממליץ על הוראה של כל חמש ההגדרות וחקירה של בעיה בודדת באמצעות כל החמש.

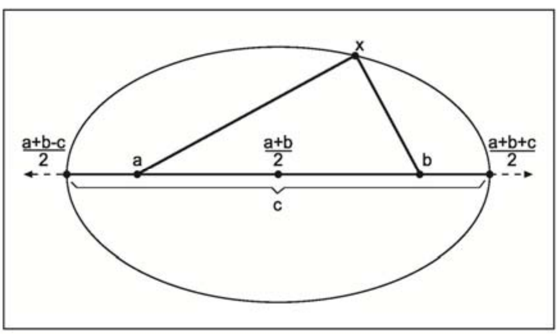
להלן – ההגדרות (Brumfiel, 1980, p. 24):

1. אם ***x*** יהיה מספר ממשי כלשהו, תהיה ***X*** נקודה על ציר המספרים, אשר הקואורדינטה שלה היא ***x***. במקרה זה $|x|$ הוא המרחק הבלתי-מכוון בין ***X*** לראשית.
2. אם ***r*** יהיה מספר ממשי כלשהו. בְּחַר שני מספרים ***x*** ו- ***y*** כלשהם. כך $x - y = r$. יהיו ***X*** ו- Y הנקודות, אשר הקואורדינטות שלהן הן ***x*** ו- ***y***. במקרה זה $|x - y|$ הוא המרחק הבלתי מכוון בין הנקודות X ו- Y.
3. $|x|$ הוא 'הגדול' מבין המספרים ***x*** ו- ***-x***. נרשום זאת בקיצור כ- $|x| = Max\ \{x, -x\}$, כלומר, $|x|$ הוא האיבר המקסימלי של הקבוצה המורכבת מ-***x*** ו-***-x***. מובן, שמתקיים $Max\ \{a, a\} = a$, וכך מטפלים במקרה $|0|$.
4. $|x| = \sqrt{x^2}$.
5. אם $x \geq 0$ אז $|x| = x$. אם $x < 0$, אז $|x| = -x$.

בהתייחס להגדרותיו של ברומפיל – ווי (Wei, 2005) מציע להשוות את המשמעות הגיאומטרית של משוואות ערך מוחלט ספציפיות לאליפסות ולהיפרבולות.

לפי ווי (Wei, 2005):

- המשמעות הגיאומטרית של $|x - a| + |x - b| = c$ היא מציאת כל הנקודות על ציר המספרים, אשר סכום מרחקיהן משתי נקודות a ו- b שווה לקבוע ***c***.
- ההגדרה של אליפסה היא קבוצת כל הנקודות במישור, אשר סכום מרחקיהן משתי נקודות קבועות, הנקראות מוקדים, הוא קבוע.
- קואורדינטות ***x*** של שני הקדקודים של האליפסה הן $\frac{(a+b)+c}{2}$ ו- $\frac{(a+b)-c}{2}$ (איור 1).
- הפתרונות של משוואת הערכים המוחלטים $|x - a| + |x - b| = c$ הם: $\frac{(a+b)}{2} + \frac{c}{2}$ או $\frac{(a+b)}{2} - \frac{c}{2}$.



איור 1: האליפסה חותכת את הציר הגדול בשתי נקודות

- באופן דומה, המשמעות הגיאומטרית של $|x - a| - |x - b| = c$ מתאימה לנקודות החיתוך של היפרבולה בעלת שני מוקדים a ו- b על ציר ה- x (Wei, 2005, p. 73).

וילהלמי, גודינו ולקסטה (Wilhelmi, Godino & Lacasta, 2007) – טוענים, כי:

> מנקודת-המבט של חינוך מתמטי, שאלה בסיסית אחת נוגעת לקביעת היעילות הדידקטית של טכניקות לפתרון בעיות, הקשורות בהגדרה מתמטית; ניתן להעריך יעילות זו באמצעות הבאתם בחשבון של הממדים האפיסטמיים (ישימות הטכניקה והאובייקטים המתמטיים המעורבים), הקוגניטיביים (היעילות והמחיר של טכניקות בקרב הפרט) וממדים הקשורים בהוראה (היקף המשאבים החומריים והזמן הנדרש להוראה) (שם, עמ' 73).

בכל הנוגע לציטוט דלעיל – אנו מציעים, שלמַעט יוצא אחד מהכלל (מס' 5 של Brumfiel) – כל ההגדרות של ברומפיל (Brumfiel, 1980) והפירושים הגיאומטריים של ווי (Wei, 2005) מתאימים רק למקרים פרטיים, וטכנית – לא ניתן להכליל את יישומם לסיטואציות, אשר קיימים בהן מספר ביטויים בערך מוחלט: למשל, פתרון של המשוואה הבאה: $|2x - 3| + |3x - 2| + |5x + 3| = 10$ באמצעות הגדרת "הפונקצייה המורכבת" $|x| = + \sqrt{x^2}$ (הגדרה מס' 4 דלעיל, כפי שהיא מופיעה אצל מולין (Mollin, 1998)), היא פעולה מורכבת מאוד, שכן יש להמיר אותה למשוואה:

$$\sqrt{(2x-3)^2} + \sqrt{(3x-2)^2} + \sqrt{(5x+3)^2} = 10$$

וכדי להיפטר מהשורשים – יש להעלות את שני האגפים של המשוואה בריבוע מספר פעמים. דבר זה מוביל לביטויים מורכבים מאוד והופך את פתרון המשוואה לכמעט בלתי-אפשרי.

קל לראות, ששימוש בהגדרות האחרות (למעט מס' 5) – יוביל למבוי סתום דומה.

2. יישום של ההגדרה החמישית של ברומפיל (Brumfiel, 1980)

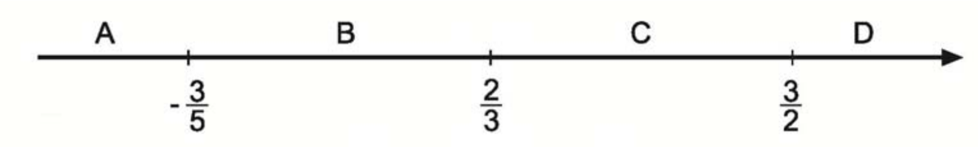
באמצעות יישום ההגדרה החמישית של ברומפיל (הזהה ל"הערכת הנקודות הקריטיות", כפי שהוצע על-ידי מקלורין (McLaurin, 1985) או ההמלצה הדומה של וגסטר (Wagster, 1986)) – אנו יכולים להכליל את השיטה ולפתור משוואות בעלות מספר כלשהו של ביטויים בערך מוחלט, הדומים לאלה המופיעים בדוגמה. בשיטה זו, אנו יכולים לבטל את סימוני הערך המוחלט בכל שלב.

לדוגמה:

$$|2x - 3| + |3x - 2| + |5x + 3| = 10$$

מוצאים את האפסים של כל ביטוי, הנמצא בערך מוחלט במשוואה, ומסמנים אותם על ציר המספרים. חשוב להדגיש, שתחום ההגדרה הוא ציר המספרים הממשיים, ולפיכך הפתרונות יהיו חלק מציר זה. כך, מחולק התחום למספר אזורים (מספר האפסים ועוד אחד), והמשוואה נפתרת בכל אינטרוול של ציר המספרים לאותו אינטרוול בלבד. אם הפתרון נמצא בתוך האינטרוול, הרי הוא פתרון של המשוואה. בדוגמה שלנו יש שלושה אפסים, ולכן יש ארבעה

אינטרוולים: A, B, C ו-D.



פתרון המשוואה לכל אינטרוול נותן את התוצאות הבאות:

$$A: x \le \frac{-3}{5} \cap -(2x-3)-(3x-2)-(5x+3)=10 \Rightarrow x=\frac{-4}{5}$$

$$\cup$$

$$B: \frac{-3}{5} < x \le \frac{2}{3} \cap -(2x-3)-(3x-2)+(5x+3)=10 \Rightarrow \emptyset$$

$$\cup$$

$$C: \frac{2}{3} < x \le \frac{3}{2} \cap -(2x-3)+(3x-2)+(5x+3)=10 \Rightarrow x=1$$

$$\cup$$

$$D: \frac{3}{2} \le x \cap (2x-3)+(3x-2)+(5x+3)=10 \Rightarrow \emptyset$$

מכאן, הפתרון הוא: $\{x / x=\frac{-4}{5}, 1\}$

3. פתרון של בעיה אותנטית בטכניקת הערך המוחלט

הצגתו של הערך המוחלט כחלק מענף האלגברה – נעשית במרבית המקרים בהקשר של פתרון תרגילים, כגון משוואות ואי-שוויונים, ולעתים נדירות יותר – תוצאה של פתרון בעיה אותנטית מחיי היום-יום.

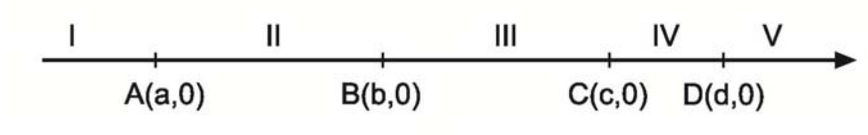
3.1 בעיה בסיסית

להלן ניתנת בעיה מהעולם האמיתי, אשר עשויה להתאים ליישום טכניקה זו:

ארבע ערים ממוקמות לאורך כביש ישר. יצרן של מוצרי מזון מעוניין לבנות מפעל במקום כלשהו לאורך הכביש – על מנת לייצר, לאחסן ולספק את המזון לארבע הערים. מאחר שהוא יודע, שמדי יום ביומו הוא חייב לשלוח מזון לכל עיר, מעוניין הספק לְמַזער את עלויותיו ולְמַקם את המפעל בנקודה כזו, ששכום המרחקים מכל עיר יהיה מינימלי.

נסמן את הכביש בציר x, וכל עיר, הממוקמת בנקודה על ציר x, תקבל קואורדינטות מתאימות: $A(a, 0)$, $B(b, 0)$, $C(c, 0)$ ו-$D(d, 0)$.

אם נניח, ש- $a<b<c<d$ (כפי שמסומן על ציר ה-x), הרי הנקודות מחלקות את ציר ה-x ל-5 אינטרוולים – כמתואר להלן:



נגדיר את $f(x)$ כסכום המרחקים מהמפעל לארבע הערים. המשימה היא להשתמש באחת ההגדרות של הערך המוחלט על מנת למצוא את הנקודה $M(x, 0)$ על ציר ה- x, אשר בעבורה מקבלת הפונקצייה $f(x)$ ערך מינימלי: $f(x) = |x – a| + |x – b| + |x – c| + |x – d|$

ניישם את שיטת ברומפיל (Brumfiel, 1980), כפי שתוארה לעיל, ונקבל ביטויים לערכה של $f(x)$ בכל אינטרוול החל ב-I ועד ל-V:

$I: x \le a \cap f(x) = – (x – a) – (x – b) – (x – c) – (x – d) = – 4x + a + b + c + d$

$II: a \le x \le b \cap f(x) = + (x – a) – (x – b) – (x – c) – (x – d) = – 2x - a + b + c + d$

$III: b \le x \le c \cap f(x) = + (x – a) + (x – b) – (x – c) – (x – d) = – a – b + c + d$

$IV: c \le x \le d \cap f(x) = +(x – a) + (x – b) + (x – c) – (x – d) = 2x – a – b – c + d$

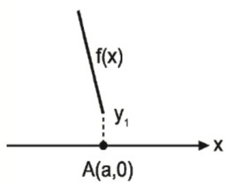
$V: d \le x \cap f(x) = + (x – a) + (x – b) + (x – c) + (x – d) = 4x – (a + b + c + d)$

כך, באינטרוולים I ו-II, פונקציית המרחק היא פונקצייה לינארית יורדת; באינטרוול III פונקציית המרחק היא פונקצייה קבועה; באינטרוולים IV ו-V, פונקציית המרחק היא פונקצייה לינארית עולה.

מקובל עלינו, שערך המינימום של פונקצייה לינארית יורדת הוא בקצה הימני של התחום שלה, וערך המינימום של פונקצייה לינארית עולה נמצא בקצה השמאלי של התחום, כמתואר להלן.

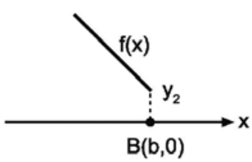
אינטרוול I:

$$min\ (x = a, y_1 = a + b + c + d – 4a)$$
או
$$min\ (x = a, y_1 = (b – a) + (c – a) + (d – a))$$
או
$$min\ (x = a, y_1 = AB + AC + AD)$$



אינטרוול II:

$$min\ (x = b, y_2 = (c + d) – (a + b))$$
או
$$min\ (x = b, y_2 = AD + BC)$$

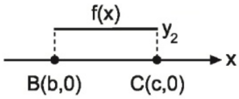


אינטרוול III:

$$min\ (b \le x \le c,\ y_2 = (c + d) - (a + b))$$

או

$$min\ (b \le x \le c,\ y_2 = AD + BC)$$

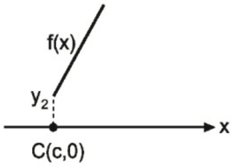


אינטרוול IV:

$$min\ (x = c,\ y_2 = (c + d) - (a + b))$$

או

$$min\ (x = c,\ y_2 = AD + BC)$$

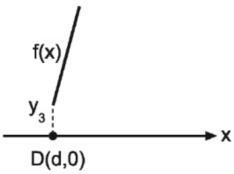


אינטרוול V:

$$min\ (x = d,\ y_3 = 3d - (a + b + c))$$

או

$$min\ (x = d,\ y_3 = AD + BD + CD)$$



השלב הבא הוא לקבוע באופן אלגברי את המינימום האבסולוטי של פונקציית המרחק:

עבור $y_1 - y_2 = (b + c + d - 3a) - (c + d - a - b) = 2b - 2a$

(1) מאחר ש- $y_2 < y_1 \Leftarrow 0 < y_1 - y_2 \Leftarrow b > a$

עבור $y_2 - y_3 = (c + d - a - b) - (3d - a - b - c) = 2c - 2d$

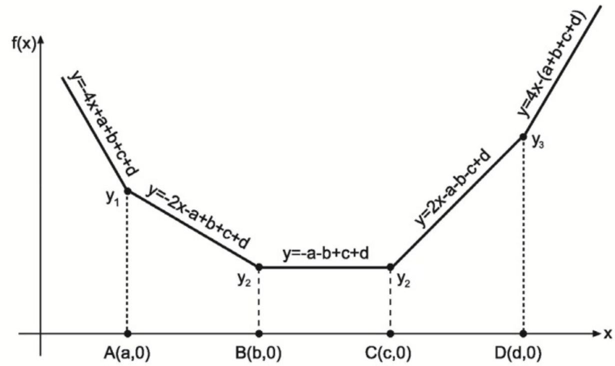
(2) מאחר ש- $y_2 < y_3 \Leftarrow 0 > y_2 - y_3 \Leftarrow c < d$

התוצאה של (1) ו-(2) היא, ש-y_2 הוא המינימום האבסולוטי של סכום המרחקים מהמפעל לארבע הערים:

$b \le x \le c,\ y_2 = (c + d) - (a + b)$

כיוון שכך, ניתן למַקם את מפעל המזון בכל נקודה על הכביש בין הערים B ו-C, כולל אפשרות למַקמו בתוך העיר B או בתוך העיר C (ראו איור 2). בכל מקרה, הסכום המינימלי של המרחקים הוא: $CD + CB + CA = CD + CB + AB + CB = AD + BC$

ברור, שמיקום המפעל בעיר A או D – יוביל למרחקי נסיעה ארוכים יותר ($AD + AC + AB$ או $AD + BD + CD$, בהתאמה).



איור 2. תרשים סכום פונקציית המרחקים עבור מספר זוגי של ערים

3.2. וריאציה של הבעיה

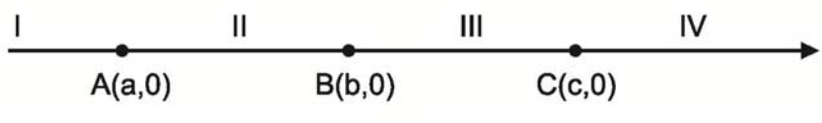
המשך החקר של בעיה אותנטית זו תוך שימוש באותה השיטה לפתרון הבעיה – חושף תוצאות בנוגע להכללת המקרה במספר כלשהו של ערים.

בעבור כל מספר זוגי של ערים (המביא למספר אי-זוגי של אינטרוולים) – סכום המרחקים המינימלי יהיה זהה, כאשר המפעל ממוקם בנקודה כלשהי באינטרוול המרכזי (כפי שנמצא עבור ארבע ערים).

לעומת זאת, בעבור מספר אי-זוגי של ערים (מספר זוגי של אינטרוולים) – סכום המרחקים המינימלי מתקבל, כאשר המפעל ממוקם בעיר המרכזית (הנקודה המרכזית של ציר ה-x). בשני המקרים, שיפועי המקטעים הסימטריים של הפונקציה סביב אינטרוול המינימום (עבור מספר זוגי של ערים) או נקודת המינימום (בעבור מספר אי-זוגי של ערים) הם שווים בערכם המוחלט:

לדוגמה, באיור 2, הערכים המוחלטים של שיפועי הפונקציות באינטרוולים I $(x < a)$ ו-V $(x > d)$ הם שווים, והערכים המוחלטים של השיפועים בקטעים II $(a \le x \le b)$ ו- IV $(c \le x \le d)$ שווים גם הם.

הפתרון למספר אי-זוגי של ערים (בדוגמה זו, שלוש ערים/ארבעה אינטרוולים) הוא כמתואר להלן:



סכום פונקציית המרחקים הוא:

$$f(x) = |x - a| + |x - b| + |x - c|$$

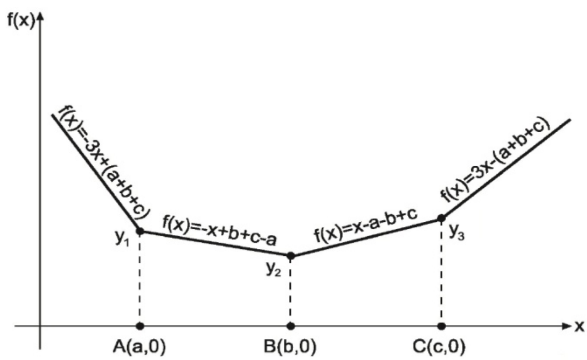
מציאת מקטעי הפונקציה בכל אינטרוול:

$I: x \le a \cap f(x) = -(x-a)-(x-b)-(x-c) = -3x+a+b+c \Rightarrow y_1 = f(a) = -2a+b+c$

$II: a \le x \le b \cap f(x) = +(x-a)-(x-b)-(x-c) = -x+b+c-a \Rightarrow y_2 = f(b) = c-a$

$III: b \le x \le c \cap f(x) = +(x-a)+(x-b)-(x-c) = x-a-b+c \Rightarrow y_2 = f(b) = c-a$

$IV: x \ge c \cap f(x) = x-a+x-b+x-c = 3x-a-b-c \Rightarrow y_3 = f(c) = 2c-a-b = c-a+c-b$



איור 3. תרשים סכום פונקציית המרחקים בעבור מספר אי-זוגי של ערים

בהנחה, כי $a < b < c$ ומתוך החישוב של $y_3 - y_1$ (המוביל ל $y_3 > y_1$) ושל $y_2 - y_1$ (המוביל לכך ש-$y_1 > y_2$), נקבל, כי $y_3 > y_1 > y_2$. הערך המינימלי של סכום המרחקים הוא $y_2 = c - a = AC$, והמיקום האופטימלי של מפעל המזון הוא העיר B (העיר האמצעית).

התיאור הגרפי של מקרה זה מובא באיור 3.

4. הרחבה של הבעיה

ניתן להרחיב בעיה אותנטית זו על ידי תוספת אילוצים או שאילת שאלות נוספות:

למשל, אם נתון, שמפעל המזון ממוקם בין שתי ערים ספציפיות, היכן יהיה המיקום עם הסכום המינימלי (מקסימלי) של המרחקים אל כל אחת מהערים?

דוגמאות נוספות: ניתן להטיל מחיר שונה על נסיעה לערים שונות, או להסיר את הדרישה, כי הערים ימוקמו לאורך אותו הכביש (קו ישר), ולאפשר להן להתמקם על שני קווים ישרים ניצבים (בדומה למערכת-צירים) עם שאלות דומות.

ברור, שהבעיה הריאליסטית ביותר היא לתת לערים להיות ממוקמות בכל מקום שהוא במישור עם אותה המשימה (מיקום המפעל באופן שמרחק הנסיעה יהיה מינימלי).

למעשה, תיירים רבים מתכננים "מסלולי כוכב", אשר הם בוחרים בהם מיקום מסוים ללינה,

והם מטיילים הלוך ושוב בכל יום כדי לבקר באתרים שמסביב.

5. שימוש בתכנה גיאומטרית דינמית בסביבת הלימודים

הלומדים עשויים ליהנות מגילוי ההבדלים בפתרון בעיות מסוג זה, ואז ניתן להתיר להם לבצע ניסיונות בשיטות שונות. זוהי הזדמנות טובה לשלב תכנות גיאומטריה דינמית (DGS), כגון GeoGebra. היתרון בתכנה מסוג זה הוא היכולת להציג באופן ויזואלי את התוצאות של בעיה מסוג זה. כאשר שומרים את התנאים הבסיסיים תחת שליטה, ניתן לשנות את מיקום המפעל, ובכל מיקום – לחשב את סכום המרחקים ממנו אל הערים. לפיכך, DGS עשויה לשמש ככלי ביניים – על מנת לגשר על הפער שבין המודל הפיזיקלי להוכחה הסימבולית הפורמלית.

בפרסום מיוחד של הקבוצה הבינלאומית לפסיכולוגיה בחינוך מתמטי – כתבו ג׳ונס, גוטירז ומריוטי (Jones, Gutiérrez & Mariotti, 2000) מאמר מערכת שכותרתו: *״הוכחות בסביבות של גיאומטריה דינמית״*, ובו הם טענו, כי *׳קיימת שורה של עדויות, שעבודה עם תכנת גיאומטריה דינמית נותנת ללומדים גישה למתמטיקה תאורטית, אשר עשויה שלא להיות נגישה בכלים פדגוגיים אחרים׳* (עמ׳ 3).

חקירה אינדוקטיבית עם כלי DGS – עשויה להנחות את הלומדים בפיתוח הנחות משלהם בנוגע לפתרון של בעיה, ולהתמודד מאוחר יותר עם ההוכחה הדדוקטיבית. זאת, כמובן, בנוסף לתרומה של ה-DGS להמחשה של הצגות גרפיות שונות לגבי מושגים ומצבים אחרים הקשורים לבעיה. לפיכך, אנו ממליצים, שמורים למתמטיקה יאפשרו בהתחלה לתלמידיהם לחקור את הבעיה באמצעות עבודה בסביבה כזו, עד שיגיעו להנחות מבוססות להוכחה דדוקטיבית. בגלל טבעה האינדוקטיבי של סביבת הגיאומטריה הדינמית (DGE) – אנו קוראים לתהליך זה ״חצי הוכחה״. מכאן, שלאחר היישום של DGE, הפער הניסיוני-תאורטי, הקיים ברכישתו והצדקתו של ידע גיאומטרי – הופך לדאגה פדגוגית ואפיסטמולוגית חשובה (Leung & Lopez-Real, 2002). יחד עם זאת, על הסטודנטים להיות מודעים לעובדה, שעליהם להוכיח תוצאות, ולא להסתמך על ניסוי וירטואלי בלבד.

6. הערות מסכמות

באמצעות הצגתן של הגדרות שונות למושג – יכולים הלומדים להבין טוב יותר את המושגים המעורבים, המובילים לידע מתמטי עמוק יותר. דרישה מהם לפתור בעיות תוך יישום של הגדרות שונות של מושג כלשהו – עשויה לחשוף את המקרים, אשר בהם הגדרה ספציפית של אותו המושג תהיה מתאימה יותר למקרים כלליים, כפי שהראינו לגבי הגדרה אחת של מושג הערך המוחלט.

במאמר זה הוצגה בעיה אותנטית מהחיים האמיתיים, אשר נפתרה לאחר-מכן באמצעות טכניקות של ערך מוחלט למצבים שונים – תוך הפקת תוצאות מעניינות.

בנוסף, מומלץ על שימוש בתכנות גיאומטריה דינמית, כגון GeoGebra, המנצלות את ההתקדמות הטכנולוגית המהירה בתקופה האחרונה בהוראת המתמטיקה ובסיוע ללומדים להמחיש ולהבין

בעיות אבסטרקטיות בדרכים מוחשיות, לפני שהם ממשיכים להוכחות דדוקטיביות. יחד עם זאת, יש להיות מודע לאופי האינדוקטיבי שלהן – לעומת הפרוצדורה הדדוקטיבית, המונחת בבסיס המתמטיקה.

ביבליוגרפיה

Brumfiel, C. (1980). Teaching the absolute value function. **Mathematics Teacher, 73**(1), 24-30.

Jones, K., Gutiérrez, Á., & Mariotti, M. A. (2000). Guest editorial. Proof in dynamic geometry environments: A PME special issue. **Educational Studies in Mathematics, 44**, 1-3.

Leung, A., & Lopez-Real, F. (2002). Theorem justification and acquisition in dynamic geometry: A case of proof by contradiction. **International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7**(2), 145-165.

McLaurin, S. C. (1985). A unified way to teach the solution of inequalities. **Mathematics Teacher, 78**(2), 91-95.

Mollin, R. A. (1998). **Fundamental number theory with application**. Boca Raton: CRC Press.

Wagster, L. W. (1986). Using number lines to solve difficult absolute-value problems. **Mathematics Teacher, 79**(4), 260-263.

Wei, S. (2005). Solving absolute value equations algebraically and geometrically. **Mathematics Teacher, 99**(1), 72-74.

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D., & Lacasta, E. (2007). Didactic effectiveness of mathematical definitions: The case of the absolute value. **International Electronic Journal of Mathematics Education, 2**(2), 72-90.