דוד פרייברט, משה סטופל

אמנות השיטות של פתרון מערכות משוואות לא-ליניאריות בשני נעלמים

תקציר

הפתרון של מערכת משוואות לא-ליניאריות טומן בתוכו תהליך מורכב, הכולל קשיים בהצבת משתנים חדשים, פיצול או איחוד של ביטויים, העלאה בחזקה, וכן – שליטה בטכניקה אלגברית. בגלל סיבות אלו – פתרון המערכת מהווה אתגר למורי המתמטיקה ולתלמידיהם המצטיינים.

במאמר אנו מציגים 11 מערכות, כשלכל משימה מובא, לפחות, פתרון אחד מלא, כולל תיאור הטכניקה, שהיוותה את הבסיס ואת הדרך להשגת הפתרון.

בשלוש מהמערכות הצגנו את המשוואות כפונקציות, והבאנו את התיאור הגרפי שלהן – כדי להבליט את מספר הפתרונות האפשריים למשימה. באחת מהמערכות קבלת הפתרון נעשתה על-ידי שילוב של דרך גרפית ודרך אלגברית.

לאורך המאמר שולבו הערות מתודיות.

מבוא

השיטות המקובלות לפתרון מערכת של משוואות פשוטות הן, בדרך כלל, **חילוץ והצבה** או **השוואת מקודמים**, **חיבור (או חיסור) של המשוואות**, וכך אנו מקבלים משוואה עם נעלם אחד. במערכת של משוואות מורכבות – אנו יכולים להשתמש בשיטות הנזכרות לעיל רק בשלבים האחרונים של תהליך הפתרון, וזאת – לאחר שנעשו מספר צעדים מקדימים, כגון: **הצבת משתנים חדשים**, **פיצול או איחוד של ביטויים**, **העלאה בחזקה**, **שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר**.

לדוגמה: נתונה מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} 3x^2+5xy+6y^2=201 \\ 10x^2+2xy+5y^2=226 \end{cases}$$

מילות מפתח: *פתרון מערכת משוואות לא-ליניאריות; משוואות הומוגניות; פולינומים סימטריים; שילוב בין הדרך הגרפית לבין הדרך האלגברית.*

המערכת מבוססת על פתרון **הבעיה המילולית המפורטת להלן**:

בכפר נופש ישנם שני בניינים מרכזיים. בכל בניין ישנם שלושה סוגי חדרים: חדר מלבני במידות של $x \cdot y$ מ״ר, ושני סוגי חדרים ריבועיים במידות x^2 ו-y^2 מ״ר. הנתונים: מספר החדרים מכל סוג בבניין הראשון, השטח הכולל שלהם, וכן – גם בבניין השני. המשימה היא לחשב את המידות של החדרים מכל סוג.

חילוץ של אחד מהמשתנים הוא, למעשה, התייחסות אל כל משוואה כאל משוואה ריבועית, שפתרונה נותן ביטוי די מורכב, הכולל שורש של אחד מהמשתנים, שאנו צריכים להציבו במשוואה השנייה, ואנו מקבלים משוואה מורכבת מאד בנעלם אחד. השוואת מקודמים בשיטה המקובלת אינה מפַשטת במידה משמעותית את הדרך אל הפתרון.

הדוגמה הנזכרת לעיל היא אחת מני רבות, שבהן אנו צריכים להשתמש בטכניקות מגוונות ומשולבות (כולל ״טריקים״ מתמטיים), ולעתים – בדרך אמנותית. זאת – כדי להתמודד עם פתרון מערכת משוואות מורכבות. במאמר זה נביא לקט של מערכות משוואות מורכבות, ונציג את פתרונותיהן תוך שימוש בשיטות ייחודיות. בחלק מהמשימות נציין פתרונות במספר דרכים. במשימה אחת נביא גם את התיאור הגרפי של המשוואות – כדי להבליט את העובדה, שאין פתרונות נוספים לאלו שנמצאו בדרך האלגברית.

החלפת משתנים ככלי לפישוט משוואות

החלפת משתנה במשתנה אחר היא טכניקה מקובלת, המפשטת את המשוואה. להלן כמה דוגמאות (ללא פתרון סופי).

א. **משוואה דו-ריבועית:** $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

על-ידי ההצבה $t = x^2$ אנו הופכים את המשוואה למשוואה ריבועית רגילה: $t^2 - 13t + 36 = 0$.

ב. **משוואה מעריכית:** $2\cdot4^x - 9\cdot2^x + 4 = 0$.

על-ידי ההצבה $t = 2^x$ אנו הופכים את המשוואה למשוואה ריבועית רגילה:

$$2t^2 - 9t + 4 = 0$$

משוואה אי-רציונלית: $\sqrt{2x^2-5x+11} + 4x^2 - 10x - 56 = 0$. נרשום את המשוואה בצורה הבאה: $\sqrt{2x^2-5x+11} + 2(2x^2 - 5x + 11) - 78 = 0$, נציב: $t = 2x^2 - 5x + 11$, ונקבל משוואה אי- רציונלית פשוטה: $\sqrt{t} + 2t - 78 = 0$.

ג. **משוואה אלגברית בעלת מכנה:**

1. $4\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 6\left(x+\frac{1}{x}\right) = 10$

נציב $t=x+\frac{1}{x}$ ונקבל משוואה ריבועית: $4t^2-6t-10=0$.

2. $\frac{12}{x^2-5x+6}-x^2+5x=10$

נרשום את המשוואה בצורה הבאה: $\frac{12}{x^2-5x+6}-(x^2-5x+6)=4$.

נציב: $t=x^2-5x+6$, ונקבל משוואה ריבועית: $t^2+4t-12=0$.

ד. מערכת משוואות עם נעלמים במכנה:

$$\begin{cases}\frac{8}{x}-\frac{4}{y}=3\\ \frac{12}{x}+\frac{12}{y}=9\end{cases}$$

נציב $v=\frac{1}{y}$, $u=\frac{1}{x}$, ונקבל מערכת פשוטה של משוואות לינאריות:

$$\begin{cases}8u-4v=3\\ 12u+12v=9\end{cases}$$

ה. מערכת משוואות מורכבת עם שורשים:

$$\begin{cases}\sqrt{\frac{y}{x}}-2\sqrt{\frac{x}{y}}=1\\ \sqrt{5x+y}+\sqrt{5x-y}=4\end{cases}$$

במשוואה הראשונה נציב: $t=\sqrt{\frac{y}{x}}$, ונקבל את המשוואה: $t-\frac{2}{t}=1\Rightarrow t^2-t-2=0$.

פתרון המשוואה מבטא קשר לינארי בין y ל-x, אשר נציב אותו במשוואה השנייה.

ו. מערכת משוואות עם שברים

$$\begin{cases}\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=\frac{13}{6}\\ xy=5\end{cases}$$

במשוואה הראשונה נציב: $t=\frac{x+y}{x-y}$, ונקבל את המשוואה הריבועית: $6t^2-13t+6=0$,

שממנה נקבל קשר לינארי בין y ל-x.

הדגמת פתרון מערכת של משוואות מורכבות

מערכת 1

$$\begin{cases} x(x+1)(3x+5y)=144 \\ x^2+4x+5y=24 \end{cases}$$

הפתרון שיובא מבוסס על הצבה מיוחדת:

מהמשוואה השנייה אנו מחלצים את הביטוי:

$x^2+4x+5y=24 \Rightarrow x^2+x+3x+5y=24 \Rightarrow 3x+5y=24-x(x+1)$.

נציב אותו במשוואה הראשונה, ונקבל את המשוואה: $x(x+1)(24-x(x+1))=144$.

נציב $t=x(x+1)$, ונקבל את המשוואה: $t(24-t)=144$.

הפתרון היחיד של המשוואה הוא $t=12$, ואז נקבל את מערכת המשוואות: $\begin{cases} x(x+1)=12 \\ 3x+5y=12 \end{cases}$

שהפתרונות שלה הם: $\left(3,\frac{3}{5}\right)$, $\left(-4,\frac{24}{5}\right)$.

מערכת 2

$$\begin{cases} x^4+y^4=97 \\ xy=6 \end{cases}$$

<u>דרך א'</u> – פתרון, המבוסס על נוסחאות הכפל המקוצר

נעלה את המשוואה השנייה בריבוע, ולאחר מכן נכפיל ב-2 את שני האגפים, ונקבל:
$2x^2y^2=72$.

נוסיף את המשוואה הנ"ל למשוואה הראשונה, ונקבל:

$$x^4+2x^2y^2+y^4=97+72 \Rightarrow (x^2+y^2)^2=169 \Rightarrow x^2+y^2=\pm 13$$

האפשרות $x^2+y^2=-13$ נפסלת.

מתקבלת מערכת משוואות פשוטה יותר:

$$\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ xy=6 \end{cases}$$

ניקח $2xy=12$ מהמשוואה השנייה, ונוסיף אותה למשוואה הראשונה, ונקבל:

$$x^2+2xy+y^2=13+12 \Rightarrow (x+y)^2=25 \Rightarrow x+y=\pm 5$$

כך נקבל שתי מערכות של משוואות פשוטות:

$\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$ או $\begin{cases} x+y=-5 \\ xy=6 \end{cases}$.

ארבעת הפתרונות הם: $(2,3),(3,2),(-2,-3),(-3,-2)$.

<u>הערה</u>: הדרך הנזכרת לעיל דורשת בדיקה של כל זוג פתרונות, משום שהפעולה של העלאה בריבוע עשויה לגרום למערכת, שאינה שקולה (בעלת קבוצת אמת רחבה יותר) למערכת מקורית. **בדיקת הפתרונות הנזכרים לעיל מראה, שכל הזוגות מתאימים למערכת המקורית**.

<u>דרך ב'</u> – פתרון, המתבסס על הצבה ופתרון משוואה דו-ריבועית

מהמשוואה השנייה נחלץ $y=\dfrac{6}{x}$, ונציב זאת במשוואה הראשונה. מתקבלת המשוואה:

$x^4+\dfrac{1296}{x^4}=97$. נציב $t=x^4$, ונקבל משוואה ריבועית $t^2-97t+1296=0$, שפתרונותיהם

הם: $t_1=81$ ו- $t_2=16$. מהפתרונות הללו נקבל את ארבעת הפתרונות:

$(2,3),(3,2),(-2,-3),(-3,-2)$

<u>דרך ג'</u> – פתרון על-ידי פולינומים סימטריים

נסמן: $x+y=u\ ,\ xy=v$.

על-ידי שימוש בסימון נקבל: $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=u^2-2v$

וגם: $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=u^4-4u^2v+2v^2$

מתקבלת מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} u^4-4u^2v+2v^2=97 \\ v=6 \end{cases}$$

מכאן, $u^4-24u^2+72=97 \Rightarrow u^4-24u^2-25=0$

נסמן: $t=u^2$, ונקבל את המשוואה: $t^2-24t-25=0$.

פתרונות המשוואה $t_1=25$ ו- $t_2=-1$, כשהפתרון השלילי נפסל, כלומר, $u^2=25 \Rightarrow u=\pm 5$.

נקבל את מערכות המשוואות:

$\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$ או $\begin{cases} x+y=-5 \\ xy=6 \end{cases}$ עם אותם הפתרונות כבדרך א' וכבדרך ב'.

מערכת 3

$$\begin{cases} y+\sqrt{x^2-y^2}=12-x \\ y\cdot\sqrt{x^2-y^2}=12 \end{cases}$$

פתרון המשימה מבוסס על העלאה בחזקה, כי חילוץ ביטוי של אחד מהנעלמים מניב ביטוי מורכב. נעלה בריבוע את המשוואה הראשונה, ונקבל:

$$y^2+2y\sqrt{x^2-y^2}+x^2-y^2=144-24x+x^2 \Rightarrow y\cdot\sqrt{x^2-y^2}=72-12x$$

נשווה את המשוואה האחרונה עם המשוואה השנייה, ונקבל: $72-12x=12 \Rightarrow x=5$.

הצבת פתרון זה באחת המשוואות נותנת את שני זוגות הפתרונות הבאים: $(5,3),(5,4)$.

מערכת 4

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+2y}+\sqrt[3]{x-y+2}=3 \\ 2x+y=7 \end{cases}$$

הפתרון מבוסס על העלאת המשוואה הראשונה בחזקת 3. שימוש בנוסחת הכפל המקוצר, $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ לגבי המשוואה הראשונה – מניב:

$$(x+2y)+3(x+2y)^{\frac{2}{3}}(x-y+2)^{\frac{1}{3}}+3(x+2y)^{\frac{1}{3}}(x-y+2)^{\frac{2}{3}}+(x-y+2)=27.$$

איסוף איברים והוצאת גורם משותף נותנים:

$$\underbrace{2x+y}_{\uparrow \atop \text{שווה ל-7 מהמשוואה השנייה}}+3(x+2y)^{\frac{1}{3}}(x-y+2)^{\frac{1}{3}}\left(\underbrace{(x+2y)^{\frac{1}{3}}+(x-y+2)^{\frac{1}{3}}}_{\uparrow \atop \text{שווה ל-3 מהמשוואה הראשונה}}\right)=25$$

מכאן, $9\cdot\sqrt[3]{x+2y}\cdot\sqrt[3]{x-y+2}=18$.

נעלה את המשוואה בשלישית, ונקבל: $(x+2y)\cdot(x-y+2)=8$.

מתקבלת מערכת משוואות פשוטה:

$$\begin{cases} (x+2y)(x-y+2)=8 \\ 2x+y=7 \end{cases}$$

הפתרונות שלה $(2,3)$ ו-$\left(\frac{13}{3},\frac{5}{3}\right)$.

מערכת 5

$$\begin{cases} x^2+y^2=7+xy \\ x^4+y^4=133-x^2y^2 \end{cases}$$

<u>דרך א'</u> – את המשוואה הראשונה נעלה בריבוע, ונחסר ממנה את המשוואה השנייה.

$$\begin{cases} x^4+2x^2y^2+y^4=49+14xy+x^2y^2 \\ x^4+y^4=133-x^2y^2 \end{cases}$$

מהחיסור נקבל: $xy=6$.

נקבל מערכת משוואות הרבה יותר פשוטה מהמערכת המקורית:

$$\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ xy=6 \end{cases}$$

פתרון מערכת זו מופיע בפתרון הסופי של מערכת 2.

<u>דרך ב'</u> – על-ידי פולינומים סימטריים.

נסמן: $xy=v, x+y=u$.

לאחר הצבת המשתנים וטיפול אלגברי – נקבל את הקשרים הבאים:

$x^2+y^2=u^2-2v$ וגם $x^4+y^4=u^4-4u^2v+2v^2$.

על-ידי הצבת קשרים אלו במערכת המקורית – נקבל את המערכת החדשה:

$$\begin{cases} u^2-2v=7+v \\ u^4-4u^2v+2v^2=133-v^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2-3v=7 \\ u^4-4u^2v+3v^2=133 \end{cases}$$

נחלץ את v מהמשוואה הראשונה, ונציב אותו במשוואה השנייה. מתקבלת משוואה דו-ריבועית ב- u, שהפתרונות שלה הם: $u^2=25$. נציב ערך זה במשוואה הראשונה, ונקבל $v=6$, כלומר,

מתקבלת המערכת: $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ xy=6 \end{cases}$ שהפתרונות שלה כבר הוצגו.

<u>הערה</u>: שימוש בדרך א' כולל העלאה בריבוע, ולכן אנו צריכים לבדוק את נכונות הפתרונות במערכת המקורית. פתרון בדרך ב' לא כולל פעולות העלאה בחזקה, ולכן זוג שהתקבל הוא פתרון.

מערכת 6

$$\begin{cases}4x^2+6xy+5y^2=33\\3x^2+2xy+2y^2=18\end{cases}$$

מערכת משוואות ממעלה שנייה נקראת <u>הומוגנית</u>, אם כל המחוברים הם גורמים ממעלה שנייה $\left(x^2,xy,y^2\right)$. משוואה מהצורה $ax^2+bxy+cy^2=0$ היא משוואה הומוגנית ממעלה שנייה.

נציג ארבע דרכים שונות לפתרון מערכת המשוואות:

<u>דרך א'</u> – חילוץ ביטוי לאחד הנעלמים

נכפיל את המשוואה השנייה ב-3 כדי להשוות את המקדמים של xy. נחסיר את המשוואות, ואז מתקבלת המשוואה: $5x^2+y^2=21 \Rightarrow y^2=21-5x^2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{21-5x^2}$.

עם הצבת y במשוואה השנייה – נקבל את המשוואה: $3x^2\pm2x\sqrt{21-5x^2}+2\left(21-5x^2\right)=18$.

לאחר סידור האיברים נקבל את המשוואה האי-רציונלית: $\pm2x\sqrt{21-5x^2}=7x^2-24$.

בהמשך נעלה את שני האגפים בריבוע, ונקבל משוואה דו-ריבועית במשתנה x.

<u>הערה</u>: עם קבלת הפתרונות של המשוואה הדו-ריבועית – נצטרך להציב אותם במשוואה המקורית כדי לוודא, שפעולת ההעלאה בריבוע לא גרמה לקבלת פתרונות שגויים.

<u>דרך ב'</u> – חילוץ והצבה

נכפיל את המשוואה הראשונה ב-3, ואת המשוואה השנייה ב-4 כדי להשוות את המקדמים של x^2. לאחר חיסור המשוואות מתקבלת המשוואה: $10xy+7y^2=27$.

נחלץ מהמשוואה את x, ונקבל $x=\dfrac{27-7y^2}{10y}$

ונציב אותו באחת המשוואות. נקבל אז משוואה דו-ריבועית ב- y.

<u>דרך ג'</u> – חילוץ והצבה

נכפיל את המשוואה הראשונה ב-6, ואת השנייה ב-11. באופן זה עם חיסור המשוואות נקבל משוואה הומוגנית. פעולה זו נותנת את המשוואה: $9x^2-14xy-8y^2=0$.

נתייחס אל המשוואה כאל משוואה ריבועית במשתנה x.

פתרונות המשוואה: $x_{1,2}=\dfrac{14y\pm\sqrt{196y^2+188y^2}}{18}=\dfrac{14y\pm22y}{18}=2y,-\dfrac{4}{9}y$.

את ערכי x נציב באחת המשוואות המקוריות, ואז נקבל משוואה ריבועית פשוטה ב- y.

<u>דרך ד'</u> – החלפת משתנה

נחלק את שתי המשוואות ב- xy (מותר לחלק את המשוואות, כי $x=0$ או $y=0$ אינם פתרונות המשוואה).

לאחר החלוקה נקבל את המשוואות:

$$\begin{cases} 4\left(\frac{x}{y}\right)+6+5\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{33}{xy} \\ 3\left(\frac{x}{y}\right)+2+2\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{18}{xy} \end{cases}$$

נסמן: $\frac{x}{y}=t$, ואז צורת המשוואות:

$$\begin{cases} 4t+6+\frac{5}{t}=\frac{33}{xy} \\ 3t+2+\frac{3}{t}=\frac{8}{xy} \end{cases}$$

כעת כמו בדרך ג' נכפיל את המשוואה הראשונה ב-6, ואת השנייה ב-11, ונחסר את המשוואות.

נקבל את המשוואה: $9t^2-14t-8=0$, שפתרונותיה $t_1=2$ ו- $t_2=-\frac{4}{9}$.

עבור $t_1=2$, ($x=2y$) נקבל את הפתרונות: $(2,1)$, $(-2,-1)$.

עבור $t_1=-\frac{4}{9}$, $\left(x=-\frac{4}{9}y\right)$ נקבל את הפתרונות: $\left(-4\sqrt{\frac{3}{23}},9\sqrt{\frac{3}{23}}\right),\left(4\sqrt{\frac{3}{23}},-9\sqrt{\frac{3}{23}}\right)$

מערכת 7

$$\begin{cases} x^2-y^2=7 \\ xy\left(x^2+y^2\right)=300 \end{cases}$$

פתרון המערכת מבוסס על **קבלת משוואה הומוגנית מסדר 4 ופתירתה באמצעות החלפת משתנים ומשוואה דו-ריבועית.**

מעלים בריבוע את המשוואה הראשונה, ומתקבלת המערכת:

$$\begin{cases} x^4-2x^2y^2+y^4=49 \\ x^3y+xy^3=300 \end{cases}$$

נכפיל את המשוואה הראשונה ב-300, ואת השנייה ב-(49-) ונחבר אותן.

נקבל משוואה הומוגנית מסדר 4: $300x^4-49x^3y-600x^2y^2-49xy^3+300y^4=0$. מכיוון ששום זוג מהצורה $(a,0)$ אינו פתרון של המערכת הנתונה, נוכל לחלק אותה ב- y^4 ואז נקבל המשוואה: $300\left(\frac{x}{y}\right)^4-49\left(\frac{x}{y}\right)^3-600\left(\frac{x}{y}\right)^2-49\left(\frac{x}{y}\right)+300=0$.

נסמן: $t=\frac{x}{y}$, ואז נקבל משוואה, שמקדמיה סימטריים ביחס לאמצע המשוואה, והיא משוואה ממעלה זוגית: $300t^4-49t^3-600t^2-49t+300=0$.

נהוג לחלק משוואה כזו בביטוי של המשתנה שבמרכז השורה. כשנחלק את המשוואה האחרונה ב- t^2 ($t\neq0$, כי $x,y\neq0$), נקבל $0 = 300t^2 - 49t - 600 - \frac{49}{t} + \frac{300}{t^2}$.

נבצע איסוף איברים לקבוצות: $0 = 300\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)-49\left(t+\frac{1}{t}\right)-600$.

נסמן: $p=t+\frac{1}{t}$, ולכן $p^2 = t^2 + 2 + \frac{1}{t^2}$. מכאן, $t^2 + \frac{1}{t^2} = p^2 - 2$.

נציב ביטויים אלו, ונקבל משוואה ריבועית ב-p: $300p^2-49p-1200=0$.

פתרונות המשוואה הם:

$p_1=\frac{25}{12}, p_2=\frac{144}{75}$.

עבור $p=\frac{25}{12}$ נקבל $t=\frac{4}{3}$ או $t=\frac{3}{4}$.

עבור $t=\frac{3}{4}$ נקבל את המערכת: $\begin{cases} x=\frac{3}{4}y \\ x^2-y^2=7 \end{cases}$

שאין לה פתרונות.

עבור $t=\frac{4}{3}$ נקבל את המערכת: $\begin{cases} x=\frac{4}{3}y \\ x^2-y^2=7 \end{cases}$ אשר פתרונותיה הם: $(4,3)$ ו- $(-4,-3)$. עבור $p=\frac{144}{75}$ אין פתרון למשוואה: $t+\frac{1}{t}=\frac{144}{75}$ $(\Delta<0)$.

ניתן לפתור את מערכת המשוואות גם על-ידי שימוש בפולינומים סימטריים.

מערכת 8

$$\begin{cases} x^2-4xy+6y^2-2x-20y=29 \\ x,y \text{ מספרים שלמים} \end{cases}$$

בניגוד למערכות הקודמות, אשר בהן היו שתי משוואות, הרי במערכת זו ישנה משוואה אחת בלבד עם שני נעלמים x ו-y, אך מופיע תנאי, שהנעלמים הם כל המספרים השלמים, המקיימים את המשוואה.

הפתרון

רושמים את המשוואה הנדונה כמשוואה ריבועית ביחס לנעלם x, דהיינו,
$x^2-(4y+2)x+(6y^2-20y-29)=0$.

כדי שלמשוואה יהיה פתרון שלם – **הדיסקרימיננטה** Δ **חייבת להיות ריבוע שלם.**

במשוואה הנ״ל הדיסקרימיננטה היא $\Delta=4\left(-2y^2+24y+30\right)$, וכדי לקבל $\Delta\geq 0$ חייב להתקיים $6-\sqrt{51}\leq y\leq 6+\sqrt{51}$. מכיוון ש-$y$ חייב להיות מספר שלם, התחום האפשרי ל-y הוא $-1\leq y\leq 13$, כלומר, אפשריים **15** ערכים של y $(-1,0,1,2,3,...,13)$.

על-ידי בדיקה נקבל, כי $-2y^2+24y+30$ הוא ריבוע שלם, כאשר $y=-1,5,7,13$. כך נקבל את הפתרונות הבאים:

$$y=-1\Rightarrow x^2+2x-3=0\Rightarrow x=1,-3$$

$$y=5\Rightarrow x^2-22x+21=0\Rightarrow x=1,21$$

$$y=13\Rightarrow x^2-54x+725=0\Rightarrow x=25,29 \qquad y=7\Rightarrow x^2-30x+125=0\Rightarrow x=5,25$$

מערכת 9

$$\begin{cases} \sqrt{x}+y=7 \\ x-\sqrt{y}=7 \end{cases}$$

תחום ההגדרה בגלל השורשים הוא $x,y\geq 0$. המקרה של $y=0$ בלתי-אפשרי, כי במקרה זה $\sqrt{x}=7$ וגם $x=7$. דבר זה בלתי- אפשרי.

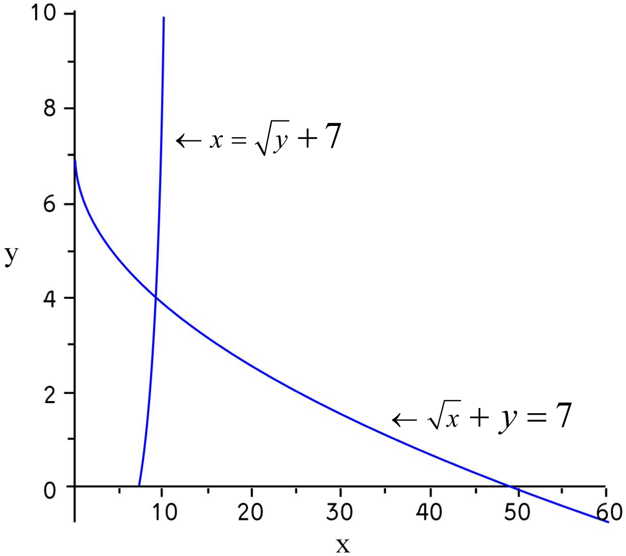
מאחר שעל פי המשוואה הראשונה – $y>0$, חייב להיות $\sqrt{x}<7$ או $x<49$. מהמשוואה השנייה נובע, ש-$x>7$. מנתונים אלו נובע, שתחום ההגדרה של x הוא $7<x<49$.

כדי להציג את התיאור הגרפי של מערכת המשוואות – נתייחס אל המשוואות כאל שתי פונקציות:

$$\begin{cases}\sqrt{x}+y=7\\ x-\sqrt{y}=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=7-\sqrt{x}\\ \sqrt{y}=x-7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=7-\sqrt{x}\\ y=x^2-14x+49\end{cases}$$

בתחומים: $y>0$ ו- $7<x<49$.

התיאור הגרפי:



מהאיור אנו רואים,
שלמערכת יש פתרון יחיד.

פתרון אלגברי:

נסמן: $v=\sqrt{y},u=\sqrt{x}$, וכך נקבל את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases}u+v^2=7\\ u^2-v=7\end{cases}$$

נחסיר את המשוואות, נפרק ונוציא גורם משותף:

$$v^2-u^2+u+v=0\Rightarrow(v+u)(v-u)+(v+u)=0\Rightarrow(v+u)(v-u+1)=0$$

מזה ש- $v+u>0$, נובע כי $\underline{v=u-1}$.

נציב קשר זה במשוואה השנייה, ונקבל את המשוואה: $u^2-u-6=0$. פתרונות המשוואה $u_1=3$ ו- $u_2=-2$ (פתרון נפסל).

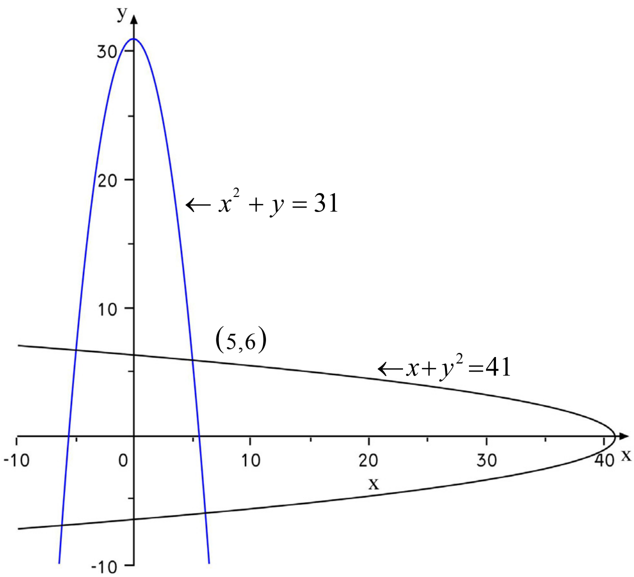
ולכן, $u=3$ ו- $v=2$ ופתרון המערכת הוא $(9,4)$.

מערכת 10

$$\begin{cases} x^2+y=31 \\ x+y^2=41 \end{cases}$$

לשם הכנת האיור הגרפי של מערכת המשוואות – נרשום כל אחת מהן כפונקציה y של x

$$\begin{cases} y=31-x^2 \\ y^2=41-x \end{cases}$$



שתי הפונקציות הן פרבולות, כשלראשונה ציר ה-y הוא ציר הסימטרייה שלה, ולשנייה ציר ה-x הוא ציר הסימטרייה שלה.

נקודות החיתוך של הפונקציה הראשונה עם הצירים הן $\left(-\sqrt{31},0\right),\left(\sqrt{31},0\right),(0,31)$.

נקודות החיתוך של הפונקציה השנייה עם הצירים הן: $(41,0),\left(0,-\sqrt{41}\right),\left(0,\sqrt{41}\right)$.

כפי שרואים מהאיור, יש למערכת ארבעה פתרונות שונים, אבל נראה, שניתן לפתור אותה רק בדרך גרפית, או על-ידי שימוש באנליזה נומרית, או בעזרת תכנת מחשב מתאימה.

אחד מהפתרונות הוא בעל ערכים שלמים: $(5,6)$.

הערות מתודיות למערכות 9-10

לא כל מערכת משוואות אלגבריות ניתן לפתור בדרך אלגברית.

במקרים רבים ניתן להגיע לפתרון הסופי רק באמצעות התיאור הגרפי של המשוואות במערכת צירים:

במקרים אלו בדרך כלל הפתרונות הם פתרונות מקורבים. התיאור הגרפי מבליט מיד את מספר הפתרונות של המערכת, ובכך הוא מונע איבוד פתרונות. באמצעות הפתרון הגרפי ניתן לפעמים למצוא פתרון מדויק של אחד מהפתרונות, והדבר מאפשר להוריד את מעלת המשוואה על-ידי חילוק פולינומים. בעידן השימוש במחשב הרי בעזרת תכנות מתאימות ניתן לצייר את התיאור הגרפי של המשוואות בצורה מדויקת, ועל-ידי כך להשיג פתרונות מקורבים בדיוק רב יותר. יש לתת את הדעת על העובדה, שתלמידים רגילים למצוא פתרונות מדויקים (בדרך כלל מספרים שלמים או רציונליים), וכאשר הם מגיעים לפתרונות מקורבים, הם בתחושה, שהגיעו לפתרון

שגוי.

כאן המקום להדגיש בפניהם, שבמקרים רבים בתחומי מדע, טכנולוגיה, כלכלה, רפואה וכדומה – מגיעים למשוואות מורכבות, שנוכל לפתור אותן בשיטות מתמטיות שונות, שבהן ניתן להגיע רק לפתרונות מקורבים (למשל, על-ידי שימוש בשיטות של אנליזה נומרית). פתרונות אלה מהווים את הבסיס להמשך החישובים בתחום הרלוונטי.

מערכת 11

$$\begin{cases} x^2+4x=4y+29 \\ xy=-6 \end{cases}$$

<u>דרך א'</u> – דרך אלגברית

חילוץ ביטוי ל-y מהמשוואה השנייה והצבתו במשוואה הראשונה – נותנים לנו משוואה ממעלה שלישית: $x^3+4x^2-29x+24=0$. במקרה זה ננסה להוציא גורם משותף, כדי שניתן יהיה להוריד את מעלת המשוואה. **על פי רוב, ניסיון כזה איננו בעל סיכוי גבוה**.

במקרה של המשוואה הנזכרת לעיל ייעשה הפירוק הבא:

$$x^3-x+4x^2-28x+24=0$$

$$x\left(x^2-1\right)+4\left(x^2-7x+6\right)=0$$

$$x(x+1)(x-1)+4(x-6)(x-1)=0$$

$$(x-1)\left[x(x+1)+4(x-6)\right]=(x-1)\left(x^2+5x-24\right)=0$$

$$(x-1)(x-3)(x+8)=0$$

מכאן פתרונות המשוואה: $(1,6),(3,-2),\left(-8,\frac{3}{4}\right)$.

<u>דרך ב'</u> – דרך גרפית, שהמשכה פתרון אלגברי.

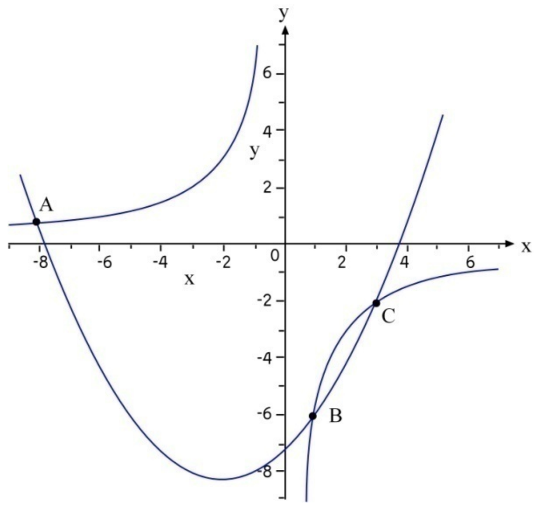
כדי לפתור את המערכת בדרך גרפית – נעבור למערכת של פונקציות, השקולה למערכת הנתונה.

$$\begin{cases} y=\frac{1}{4}x^2+x-7\frac{1}{4} \\ y=-\frac{6}{x} \end{cases}$$

המשוואה הראשונה היא משוואה של פרבולה, והמשוואה השנייה היא משוואה של היפרבולה.

כדי לתאר גרפית את הפונקציות – נבנה טבלאות ערכים של (x,y).

התיאור הגרפי



מהאיור הגרפי אנו רואים, שהפונקציות נחתכות בשלוש נקודות. מהגרף אנו רואים, ששיעורי הנקודה C הם בקירוב טוב $(3,-2)$. אכן הצבת שיעורים אלו במערכת המשוואות מאשרת, שהם אחד מפתרונות המערכת.

לאחר שנמצא הפתרון $x=3$, נקח את המשוואה מהמעלה השלישית, שהתקבלה בשלב הראשון בדרך אלגברית (בדרך א'), ונבצע את חלוקתה ב- $(x-3)$ על-פי חלוקת פולינומים,

$$(x^3+4x^2-29x+24):(x-3)=x^2+7x-8$$

פתרונות המשוואה $x^2+7x-8=0$ הם:

$x_1=1$ ו- $x_2=-8$,

מכאן פתרונות המערכת הם: $\left(-8,\frac{3}{4}\right),(3,-2),(1,6)$.

סיכום

במהלך ההתמודדות עם פתרון של בעיות מתחומים שונים – מגיעים לעתים די קרובות למערכת של משוואות, שהשגת הפתרון שלהן מהווה אתגר לתלמידים מצטיינים, למורים ואף לאנשי-מדע. ההתמודדות עם בעיות כאלו תורמת לפיתוח החשיבה האלגברית.

לשם כך הצגנו לקט מגוון של מערכות בעלות שתי משוואות, והבאנו דרכים ושיטות – כולל שימוש בתיאור הגרפי – להשגת הפתרונות שלהן.

ביבליוגרפיה

גירון, ש' (1999). *לקט מבחנים מאליפויות בתי-ספר במתמטיקה*. חיפה: הטכניון.

גינזבורג, א' (2007-2008). *אלגברה: ספר לימוד ואוסף תרגילים* (כר' א-ב). אבן יהודה: רכס.

הירש, ג' (1999). *מתמטיקה אחרת*. אבן יהודה: רכס, עמ' 67-69.

קון, ב"צ (2003). *קובץ בחינות ממכינת הטכניון*. חיפה: בק, עמ' 0-21, 0-23, א-43.

Hardy, G. H., & Wright, E. M. (1979). *An introduction to the theory of numbers* (5th ed.). Oxford: Clarendon.