חקירת נגזרות בעזרת ניתוח קומבינטורי של רכיבי הפונקציה

תקציר

כאשר נתונה פונקציה מורכבת מהצורה $h(x) = f[g(x)]$ ורוצים לקבוע אם הנגזרת שלה מסדר *n* מתאפסת בנקודה $x = x_o$ או את סימנה של הנגזרת ה-n-ית, על-ידי גזירה של *n* פעמים והצבה – נתקלים בקשיים בחישוב ערך הנגזרת מסדר *n* בנקודה הנ״ל.

במאמר מוצעת שיטה אלטרנטיבית, המאפשרת לחקור את הנגזרת מסדר *n* של הפונקציה *h(x)* וזאת – על סמך החקירה של הפונקציות *g(x)* ו-*f(x)*בלבד.

למטרה זו נוסחו והוכחו שתי תכונות קשר בין הנגזרות של *h(x)* לבין הנגזרות של הפונקציות *g(x)* ו-*f(x)*.

הובאו מספר דוגמאות המיישמות את המסקנות של תכונות הקשר.

הקדמה

כאשר נתונה פונקציה $f(x)$, אשר ניתנת לגזירה פעמים רבות, מתעורר במקרים רבים הצורך לענות על השאלות הבאות:

(i) האם הנגזרת ה *n*-ית של הפונקציה $f(x)$ מתאפסת בנקודה x_0?

(ii) מהו הסימן של הנגזרת ה *n*-ית של הפונקציה $f(x)$ בנקודה x_0 או בקטע $[a,b]$?

התשובות על השאלות הללו חשובות בתחומים רבים.

כך, למשל:

א. משפט מפורסם בחדו״א, הנלמד כבר בתיכון, אומר: ״אם *n-1* הנגזרות הראשונות של הפונקציה $f(x)$ מתאפסות בנקודה x_0, והנגזרת ה *n*-ית לא מתאפסת, אז אם *n* אי-זוגי, הנקודה x_0 היא נקודת פיתול, ואם *n* זוגי, הנקודה x_0 היא נקודת קיצון״ (גורן, 1991, עמ׳ 71).

ב. כאשר מחפשים שורש של משוואה $x = \varphi(x)$ בשיטת האיטרציה $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, הרי המספר של הנגזרת הראשונה, שלא מתאפסת בשורש, קובע את סדר ההתכנסות (Dahlquist and Bjorck, 1974, פרק 6.5).

ג. כאשר נחשב קירוב לאינטגרל בעזרת אינטגרציית *Gauss* על *n* נקודות, נקבל ביטוי לשגיאה:

מילות מפתח: *תכונות של נגזרות מסדר גבוה; איפוס נגזרות.*

$E_n[f] = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b w(x) \left[\prod_{i=1}^{n} (x - xi) \right]^2 dx$ (Dahlquist and Bjorck, 1974, פרק 7.4).

סימן השגיאה נקבע לפי הסימן של הנגזרת $f^{(2n)}(\xi)$, כאשר $\xi \in (a,b)$.

נציג את החשיבות של קביעת סימן השגיאה על-ידי **הדוגמה הבאה:**

רובוט, המסוגל להרים עד 10 ק״ג, נשלח למשימה, שבה הוא צריך להרים מסה.

המשקל של המסה מחושב בעזרת אינטגרצית *Gauss* על 8 נקודות. נניח שקיבלנו, כי המשקל המקורב הוא 10 ק״ג. האם הרובוט יהיה מסוגל לבצע את המשימה?

אם נצליח לקבוע, כי הנגזרת ה- $f^{(16)}$ שלילית בקטע, המכיל את נקודת-הדגימה, אז נדע, כי הסטייה שלילית, והרובוט מסוגל להרים את המסה.

ד. שימוש נוסף הוא בגאומטריה דיפרנציאלית (Bruce and Giblin, 1992, פרק 2.1).

כאשר מדובר בפונקציה אלמנטרית בסיסית, קל יחסית לענות על השאלות הללו. במקרה הגרוע ביותר – יש לגזור n פעמים ולהציב את x_0. אך מה נעשה, כאשר נתונה פונקציה מורכבת $f(g(x))$?

לפי כלל השרשרת וכלל המכפלה, מספר המחוברים שיש לגזור – גדל בצורה אקספוננציאלית-מעריכית (ללא כינוס אברים).

לדוגמה:

איזו נגזרת של $f(x) = (\cos x - 1)^4$ אינה מתאפסת בנקודה $x = 0$?

באמצעות גזירה ופישוט הביטוי בעזרת כינוס אברים – נקבל:

$$f'(x) = -4(\cos x - 1)^3 \sin x$$

$$f''(x) = 12(\cos x - 1)^2 \sin^2 x - 4(\cos x - 1)^3 \cos x$$

$$f'''(x) = -24(\cos x - 1)\sin^3 x + 36(\cos x - 1)^2 \cos x \sin x + 4(\cos x - 1)^3 \sin x$$

$$f^{(4)}(x) = 24\sin^4 x - 144(\cos x - 1)\cos x \sin^2 x - 48(\cos x - 1)^2 \sin^2 x + 36(\cos x - 1)^2 \cos^2 x + 4(\cos x - 1)^3 \cos x$$

$$f^{(5)}(x)=240\cos x\sin^3 x+240(\cos x-1)\sin^3 x-360(\cos x-1)\cos^2 x\sin x-$$
$$180(\cos x-1)^2\cos x\sin x-4(\cos x-1)^3\sin x$$
$$f^{(6)}(x)=-480\sin^4 x+1080\cos^2 x\sin^2 x+1800(\cos x-1)\cos x\sin^2 x+$$
$$192(\cos x-1)^2\sin^2 x-360(\cos x-1)\cos^3 x-180(\cos x-1)^2\cos^2 x-$$
$$4(\cos x-1)^3\cos x$$
$$f^{(7)}(x)=-5880\cos x\sin^3 x-2184(\cos x-1)\sin^3 x+2520\cos^3 x\sin x+$$
$$5040(\cos x-1)\cos^2 x\sin(x)+756(\cos x-1)^2\cos x\sin x+4(\cos x-1)^3\sin x$$
$$f^{(8)}(x)=8064\sin^4 x-30240\cos^2 x\sin^2 x-18144(\cos x-1)\cos x\sin^2 x-$$
$$768(\cos x-1)^2\sin^2 x+2520\cos^4 x+5040(\cos x-1)\cos^3 x+$$
$$756(\cos x-1)^2\cos^2 x+4(\cos x-1)^3\cos x$$

רק בסוף על-ידי הצבת $x=0$ בכל הנגזרות שקיבלנו – נקבע, כי שבע הנגזרות הראשונות מתאפסות, ורק הנגזרת השמינית שונה מאפס.

מה נעשה, אם נצטרך לקבוע באיזו נגזרת $f(x)=(\cos x-1)^{10}$ לא מתאפסת?

במאמר זה נציע דרך חלופית להתמודדות עם בעיות מסוג זה.

נראה, כי כאשר גוזרים לפי כלל השרשרת ולפי כלל המכפלה, כל המחוברים שמתקבלים מהגזירה – מקיימים תכונות "קשר".

בעזרת תכונות "קשר" הללו וחקירה של פונקציות *f(x)* ו *g(x)* **בנפרד**, נוכל לענות על חלק גדול מהשאלות שהצגנו.

תכונות הקשר של הנגזרות בפונקציה מורכבת:

עבור פונקציה מורכבת $f(g(x))$ הנגזרת הראשונה היא: $f'(g)g'(x)$, והנגזרת השנייה היא: $f''(g)g'(x)g'(x)+f'(g)g''(x)$ וכו'.

קל לראות, כי כל הנגזרות הן סכום של מחוברים, כאשר כל מחובר מכיל גורם $f(g(x))$ בודד בנגזרת מסוימת, ומספר גורמי *g(x)* בנגזרות מסוימות.

תכונה 1:

בנגזרת ה *k*-ית של הפונקציה $f(g(x))$, הרי בכל מחובר סכום של מספר גזירות לפי *g(x)* הוא *k*.

הוכחה:

נוכיח באינדוקציה:

בסיס: בנגזרת הראשונה ($f'(g)g'(x)$) יש גזירה אחת לפי *g(x)*.

צעד: נניח, כי בנגזרת ה *k-1* בכל מחובר יש *k-1* גזירות לפי *g(x)*.

כדי לקבל את הנגזרת ה *k*-ית, הרי לפי כלל המכפלה גוזרים כל מחובר לפי כל הגורמים שלו.

אם גוזרים מחובר לפי הגורם $g^{(m)}$ (הנגזרת ה m-ית של g), נקבל מחובר חדש, שבו כל הגורמים נשארו ללא שינוי, ורק $g^{(m)}$ יוחלף ב-$g^{(m+1)}$. לכן בהסתמך על הנחת האינדוקציה במחובר החדש – יש k גזירות לפי g.

אם גוזרים מחובר לפי הגורם $f^{(n)}(g)$, נקבל מחובר חדש, שבו כל הגורמים נשארו ללא שינוי, ורק $f^{(n)}(g(x))$ יוחלף ב- $f^{(n+1)}(g)g'(x)$. לכן בסה"כ מספר הגזירות לפי g גדל ב-1.
בהסתמך על הנחת האינדוקציה במחובר החדש – יש k גזירות לפי $g(x)$.

תכונה 2:

בכל מחובר, שבו הגורם $f(g)$ מופיע בנגזרת ה n-ית (זאת אומרת מופיע כ- $f^{(n)}(g)$), יהיו בדיוק n גורמים, שהם נגזרות של $g(x)$ (כלומר,בדיוק n גורמים מהצורה ($m \in N; g^{(m)}$).

הוכחה:

נוכיח באינדוקציה:

בסיס: בנגזרת הראשונה ($f'(g)g'(x)$) יש גורם אחת מהצורה ($m \in N; g^{(m)}$) (הגורם $g'(x)$).

צעד: נניח, כי בנגזרת ה k-1 בכל מחובר, שבו מופיע גורם $(n \in N; f^{(n)})(g)$ יש בדיוק n גורמים מהצורה ($m \in N; g^{(m)}$).

כדי שנקבל את הנגזרת ה k-ית לפי כלל המכפלה, נגזור כל מחובר לפי כל הגורמים שלו.
אם גוזרים מחובר לפי הגורם $g^{(m)}$, נקבל מחובר חדש, שבו כל הגורמים נשארו ללא שינוי, ורק $g^{(m)}$ יוחלף ב- $g^{(m+1)}$, כלומר מספר גורמי $g^{(m)}$ לא ישתנה. לכן לפי הנחת האינדוקציה מספר גורמי $g^{(m)}$ שווה לנגזרת, שבה מופיע הגורם $f^{(n)}(g)$.

אם נגזור את המחובר לפי הגורם $f^{(n)}(g)$, נקבל מחובר חדש, שבו $f^{(n)}(g)$ יוחלף ב- $f^{(n+1)}(g)g'(x)$. לכן גם הנגזרת של $f^{(n)}(g)$ וגם מספר גורמי $g^{(m)}$ גדלו ב-1, ולפי הנחת האינדוקציה, במחובר החדש – מספר גורמי $g^{(m)}$ שווה לנגזרת, אשר בה מופיע הגורם $f^{(n)}(g)$.

פתרון בעיות בעזרת תכונות הקשר וחקירה של פונקציות $f(y)$ ו-$g(x)$ בנפרד:

התאפסות הנגזרת בנקודה x_0 :

מקרה א'

נניח, כי מחקירה של הפונקציות $f(y)$ ו-$g(x)$ קיבלנו: $g(x)$ מתאפסת בנקודה x_0 ב-q-1 הנגזרות הראשונות, ולא מתאפסת, בנגזרת ה-q. $f(x)$ מתאפסת בנקודה $g(x_0)$ ב- p-1 נגזרות ראשונות, אבל אינה מתאפסת בנגזרת ה-p.

מסקנה (א) לגבי $f(g(x))$: הנגזרת מתאפסת בנקודה X_0 ב-pq-1 נגזרות ראשונות ואינה מתאפסת בנגזרת ה-pq.

הוכחה: כל הנגזרות של $f(g(x))$ מורכבות מסכום של מחוברים, כאשר בכל מחובר מופיע הגורם מהצורה $f^{(n)}$ ומכפלה של נגזרות שונות של *g(x)*.

נשים לב, כי בכל מחובר, שבו הגורם $f^{(n)}$ מופיע, כאשר $n < p$ הנגזרת תתאפס, וכן בכל מחובר, אשר בו הגורם $g^{(m_i)}$ מופיע, כאשר $m_i < q$ הנגזרת תתאפס.

עלינו להוכיח:

(*i*) $f(g(x))$ מתאפס בנקודה x_0 ב-*(pq-1)* נגזרות הראשונות.

(*ii*) $f(g(x))$ לא מתאפס בנקודה x_0 בנגזרת ה-*pq*.

כדי להוכיח את (*i*) נוכיח, כי כל המחוברים המופיעים בנגזרת – מתאפסים.

נתבונן בנגזרת ה *k*-ית כאשר $k < pq$. בכל מחובר: אם הגורם $f^{(n)}$ מופיע, כאשר $n < p$, אז המחובר מתאפס. אם הגורם $f^{(n)}$ מופיע, כאשר $n \geq p$, אז לפי תכונה 2, במחובר זה יש *n* גורמי $g^{(m_i)}$.

לפי תכונה 1, מספר הגזירות לפי גורמי *g(x)* שווה ל-*k*.

קיבלנו, כי יש $n \geq p$ גורמי $g^{(m_i)}$, ובסה"כ $k < pq$ גזירות לפי *g(x)*. לכן במחובר קיים גורם $g^{(m_i)}$, המופיע בנגזרת הקטנה מ-*q* ($m_i < q$), ולכן גורם זה מתאפס.

כדי להוכיח את (*ii*) נוכיח, כי

(א) בנגזרת ה-*pq* יש גורמים, שצורתם $f^{(p)}\underbrace{g^{(q)}g^{(q)}......g^{(q)}}_{p}$ שלא מתאפסים.

(ב) אין גורמים מהצורה השונה מ- $f^{(p)}\underbrace{g^{(q)}g^{(q)}......g^{(q)}}_{p}$ שלא מתאפסים, ולכן כל הנגזרת ה-*pq* תמיד לא מתאפסת.

(א) לפי כלל המכפלה, בכל שלב בגזירה – גוזרים כל מחובר לפי כל הגורמים שלו. לכן בשלב ה-*p* יהיה גורם, שצורתו $f^{(p)}\underbrace{g'g'......g'}_{p}$. עבור כל g' צריך עוד *q-1* נגזרות נוספות, כדי שיגיע לנגזרת ה-*q*-ית (כלומר ל- $g^{(q)}$), ובסה"כ בשלב ה-*pq* יופיע מחובר, שצורתו $f^{(p)}\underbrace{g^{(q)}g^{(q)}......g^{(q)}}_{p}$ שלא מתאפס.

(ב) בנגזרת ה-*pq*, אם מחובר שונה מ- $f^{(p)}\underbrace{g^{(q)}g^{(q)}......g^{(q)}}_{p}$, אז אם הגורם $f^{(n)}$ מופיע, כאשר $n < p$, ברור, שהמחובר מתאפס; אם הגורם $f^{(n)}$ מופיע, כאשר $n = p$, אז משום שהמחובר שונה מ- $f^{(p)}\underbrace{g^{(q)}g^{(q)}......g^{(q)}}_{p}$

יש גורם $g^{(m_i)}$, המופיע בנגזרת השונה מ-q, מכיוון שלפי תכונות 1 ו-2 יש p גורמי $g^{(m_i)}$ ובדיוק pq נגזרות לפי גורמי $g(x)$, ולכן אם יש גורם $g^{(m_0)}$, כאשר $m_0 > q$, אז קיים גורם $g^{(m_1)}$ כאשר $m_1 < q$, והדבר מביא להתאפסות המחובר.

אם הגורם $f^{(n)}$ מופיע, כאשר $n > p$, הרי במחובר זה יש n גורמי $g^{(m)}$ ו-pq נגזרות לפי גורמי $g(x)$, ולכן קיים גורם $g^{(m_0)}$, כאשר $m_0 < q$, ולכן המחובר מתאפס.

<u>דוגמה</u>: נחזור לשאלה שהצגנו בהקדמה. הפונקציה $(\cos x - 1)^4$ היא פונקציה מורכבת, כאשר

$$f(y) = y^4 \ , \ g(x) = \cos x - 1 \ .$$

נחקור את $f(y)$ ואת $g(x)$ בנפרד:

$$g'(0) = -\sin 0 = 0 \Leftarrow g'(x) = -\sin x$$

$$g''(0) = -\cos 0 = -1 \Leftarrow g''(x) = -\cos x$$

קיבלנו, ש-$g(x)$ מתאפסת בנגזרת הראשונה ולא מתאפסת בנגזרת השנייה (כלומר, $q=2$).

בנקודה $x=0$ $\cos x - 1 = 0$, קל לראות, כי בשלוש הנגזרות הראשונות $f(y)$ מתאפסת בנקודה $g(0)$ ובנגזרת הרביעית נקבל $f^{(4)}(0) = 4!$ (כלומר, $p=4$).

לפי מסקנה (א) נסיק, כי $(\cos x - 1)^4$ מתאפסת ב- $pq - 1 = 4 \cdot 2 = 7$ נגזרות הראשונות, ולא מתאפסת בנגזרת ה- $pq = 4 \cdot 2 = 8$.

(השווה למאמץ שהשקענו בהקדמה כדי להגיע לתוצאה זו).

מקרה ב'

נניח, כי מחקירה של הפונקציות $f(y)$ ו $g(x)$ קיבלנו: $g(x)$ לא מתאפסת בנקודה X_0 ב- $q-1$ נגזרות ראשונות. $F(y)$ לא מתאפסת בנקודה $g(x_0)$ ב- $p-1$ נגזרות ראשונות.

בנוסף קיבלנו כי $g(x)$ מתאפסת בנקודה X_0 בנגזרות מ-q עד $(p-1)(q-1)+1$, וכן $f(y)$ מתאפסת בנקודה $g(x_0)$ בנגזרות מ-p עד $(p-1)(q-1)$.

(כאשר $f(x)$ וכל הנגזרות שלה חיוביות בנקודה $g(x_0)$, וכן $g(x)$ וכל הנגזרות שלה חיוביות בנקודה x_0)

מסקנה (ב) לגבי f(g(x)) : $f(g(x))$ לא מתאפסת ב-$(p-1)(q-1)$ נגזרות ראשונות, ומתאפסת בגזרת $(p-1)(q-1)+1$.

הוכחה: כל הנגזרות של $f(g(x))$ מורכבות מסכום של מחוברים, כאשר בכל מחובר מופיע הגורם מהצורה $f^{(n)}$ ומכפלה של גורמי $g(x)$ בנגזרות מסוימות.

אם גורם ה $f^{(n)}$ מופיע בנגזרת הגדולה או שווה ל-p ($n \geq p$), הרי כל המחובר מתאפס.

נניח, כי הגורם $f^{(n)}$ מופיע בנגזרת הקטנה מ-*p*. לפי תכונה 2 במחובר זה יש *n* גורמי $g^{(m)}$ ($n < p$ ולכן מספר גורמי $g^{(m)}$ הוא *p-1* לכל היותר). לפי תכונה 1 בנגזרת ה *k*-ית של $f(g(x))$ יש בדיוק *k* גזירות לפי גורמי $g^{(m)}$.

כאשר $k = (p-1)(q-1)+1$ לפי עקרון "שובך היונים", נקבל, כי קיים גורם $g^{(m)}$, המופיע בנגזרת הגדולה או שווה ל $\left\lceil \frac{(p-1)(q-1)+1}{n} \right\rceil$ (הסימן ⌈ ⌉ הוא החלק השלם העליון).

אבל $q = \left\lceil \frac{(p-1)(q-1)+1}{p-1} \right\rceil \le \left\lceil \frac{(p-1)(q-1)+1}{n} \right\rceil$

לכן קיים גורם $g^{(m)}$, המופיע בנגזרת הגדולה או שווה ל-*q*, ולכן המחובר מתאפס.

קיבלנו, כי בנגזרת ה $(p-1)(q-1)+1$ כל המחוברים מתאפסים, ולכן הנגזרת מתאפסת.

בנגזרות הקטנות מ-*((p-1)(q-1)+1)* קל לראות, שאם נגזור את $f(g(x))$ לפי הגורם *f(x)* לכל היותר *p-1* פעמים, ואז נגזור לפי כל גורמי ה-$g^{(m)}$, שמופיעים במחובר בזה אחר זה, נקבל מחובר, שבו הגורם $f^{(n)}$ מופיע בנגזרת הקטנה מ-*p* וכל גורמי ה-$g^{(m)}$ מופיעים בנגזרות הקטנות מ-*q*, ולכן מחובר זה לא מתאפס.

<u>הערה</u>: אם ההנחה לגבי החיוביות של *f(x)* ו-*g(x)* אינה מתקיימת, ייתכן, שגם נגזרת, הקטנה מ-*((p-1)(q-1)+1)* תתאפס.

<u>דוגמה</u>:

איזו נגזרת של $(\ln(\frac{1}{1-x})+2-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}-\frac{x^7}{7})^2$ מתאפסת בנקודה $x=0$?

זו פונקציה מורכבת, כאשר: $g(x) = (\ln(\frac{1}{1-x})+2-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}-\frac{x^7}{7})$ ו- $f(y) = y^2$

נבדוק את ערכי הנגזרות של $g(x)$ בנקודה $x=0$ ואת ערכי הנגזרות של $f(y)$ בנקודה $g(0)$

$$g'(0)=1 \Leftarrow g'(x)=(\frac{1}{1-x}-x^3-x^4-x^5-x^6)$$

$$g''(0)=1 \Leftarrow g''(x)=(\frac{1}{(1-x)^2}-3x^2-4x^3-5x^4-6x^5)$$

$$g'''(0)=2 \Leftarrow g'''(x)=(\frac{2}{(1-x)^3}-6x-12x^2-20x^3-30x^4)$$

$$g^{(4)}(0)=0 \Leftarrow g^{(4)}(x)=(\frac{6}{(1-x)^4}-6-24x-60x^2-120x^3)$$

$$g^{(5)}(0)=0 \Leftarrow g^{(5)}(x)=(\frac{24}{(1-x)^5}-24-120x-360x^2)$$

$$g^{(6)}(0)=0 \Leftarrow g^{(6)}(x)=(\frac{120}{(1-x)^6}-120-720x)$$

$$g^{(7)}(0)=0 \Leftarrow g^{(7)}(x)=(\frac{720}{(1-x)^7}-720)$$

קיבלנו, כי שלוש הנגזרות הראשונות של $g(x)$ לא מתאפסות, אבל בנקודה *x=0* הנגזרות 4-7 מתאפסות (כלומר $q=4$).

$$g(0)=(\ln(\frac{1}{1-0})+2-\frac{0^4}{4}-\frac{0^5}{5}-\frac{0^6}{6}-\frac{0^7}{7})=2$$

קל לראות, כי בנקודה $g(0)$ שתי הנגזרות הראשונות של $f(y)$ לא מתאפסות, וכל הנגזרות החל מהנגזרת השלישית – מתאפסות (כלומר $p=3$).

לפי מסקנה (ב) נסיק, כי $(p-1)(q-1)=(4-1)(3-1)=6$ הנגזרות הראשונות של $(\ln(1-x)+2+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}+\frac{x^7}{7})^2$ לא מתאפסות, והנגזרת השביעית $(p-1)(q-1)+1=(4-1)(3-1)+1=7$ מתאפסת.

האם הנגזרת חיובית או שלילית?

מקרה א'

נניח, כי מחקירה של הפונקציות $f(y)$ ו-$g(x)$ קיבלנו:

כל הנגזרות של $g(x)$ חיוביות בנקודה x_0,

וכל הנגזרות של $f(y)$ חיוביות בנקודה $g(x_0)$.

מסקנה לגבי $\mathbf{f(g(x))}$:

בנקודה x_0 כל הנגזרות של $f(g(x))$ חיוביות.

הפונקציה	בנקודה	סימן הנגזרות
$g(x)$	$x = x_0$	+
$f(y)$	$y = g(x_0)$	+
$f(g(x))$	$x = x_0$	+

הוכחה:

בכל נגזרת של $f(g(x))$ יופיעו מחוברים, המורכבים ממכפלת נגזרות של $f(y)$ ושל $g(x)$, ולכן כל מחובר מכיל רק גורמים חיוביים, ולכן המשמעות היא, שגם הנגזרת של $f(g(x))$ חיובית.

מקרה ב'

נניח, כי מחקירה של הפונקציות $f(y)$ ו-$g(x)$ קיבלנו:

בנקודה x_0 כל הנגזרות של $g(x)$ שליליות.

בנקודה $g(x_0)$ הנגזרות הזוגיות של $f(y)$ הן חיוביות, והנגזרות האי-זוגיות הן שליליות.

מסקנה לגבי $f(g(x))$: בנקודה x_0 כל הנגזרת $f(g(x))$ חיובית.

הפונקציה	בנקודה	סימן הנגזרות: הזוגיות	סימן הנגזרות: האי-זוגיות
$g(x)$	$x = x_0$	–	–
$f(y)$	$y = g(x_0)$	+	–
$f(g(x))$	$x = x_0$	+	+

הוכחה:

כל נגזרת של $f(g(x))$ היא סכום של מחוברים, כאשר בכל מחובר מתקיים:

(*i*) אם הגורם $f^{(n)}$ מופיע בנגזרת זוגית (כלומר n זוגי), אז אנו יודעים שהוא חיובי. לפי תכונה 2 הרי במחובר זה יש גם מספר זוגי n של גורמים מהצורה $g^{(m)}$ (תמיד שליליים), ולכן מכפלתם חיובית, ובסה"כ: חיובי ($f^{(n)}$) × חיובי (מכפלת גורמי $g^{(m)}$) = חיובי.

(*ii*) אם הגורם $f^{(n)}$ מופיע בנגזרת אי-זוגית (n אי-זוגי), אז אנו יודעים שהוא שלילי. לפי תכונה 2, המחובר מכיל גם n (אי-זוגי) גורמי $g^{(m)}$ (תמיד שליליים), ולכן מכפלתם

שלילית, ובסה"כ שלילי × שלילי = חיובי.

מסקנה: בכל הנגזרות של $f(g(x))$ כל המחוברים חיוביים, ולכן כל הנגזרות חיוביות.

דוגמה:

נחקור את סימן הנגזרות של הפונקציה $\cosh(-\frac{1}{\sqrt{1-x}})$ בנקודה $x=0$.

זו פונקציה מורכבת, כאשר: $g(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x}}$; $f(y)=\cosh y$.

נתבונן בנגזרות של הפונקציות: $g'(x)=-\frac{1}{2(1-x)^{\frac{3}{2}}}$, $g''(x)=-\frac{3}{4(1-x)^{\frac{5}{2}}}$

$f'(y)=\sinh y$, $f''(y)=\cosh y$

לא קשה לראות, כי כל הנגזרות של $g(x)$ שליליות בנקודה $x=0$, והנגזרות של $f(y)=\cosh y$ מחליפות סימן בנקודה $g(0)=-\frac{1}{\sqrt{1-0}}=-1$, כאשר הנגזרות הזוגיות הן חיוביות, והאי-זוגיות הן שליליות.

לפי מסקנה (ב) נסיק, כי כל הנגזרות של $\cosh(-\frac{1}{\sqrt{1-x}})$ חיוביות בנקודה $x=0$.

מקרה ג'

נניח, כי מחקירה של הפונקציות f(y) ו-g(x) קיבלנו:

בנקודה x_0 כל הנגזרות של *g(x)* שליליות.

בנקודה $g(x_0)$ הנגזרות הזוגיות של $f(y)$ הן שליליות, והנגזרות האי-זוגיות של $f(y)$ הן חיוביות.

מסקנה לגבי f(g(x)):

בנקודה x_0 כל הנגזרת של $f(g(x))$ הן שליליות.

הפונקציה	בנקודה	סימן הנגזרות: הזוגיות	סימן הנגזרות: האי-זוגיות
$g(x)$	$x=x_0$	$-$	$-$
$f(y)$	$y=g(x_0)$	$-$	$+$
$f(g(x))$	$x=x_0$	$-$	$-$

הוכחה: בכל מחובר מתקיים:

(i) אם הגורם $f^{(n)}$ מופיע בנגזרת זוגית (n זוגי), אנו יודעים שהוא שלילי. לפי תכונה 2, במחובר זה יש n (מספר זוגי) גורמי $g^{(m)}$ (תמיד שליליים), ולכן מכפלתם חיובית, ובסה"כ שלילי × חיובי = שלילי.

(ii) אם הגורם $f^{(n)}$ מופיע בנגזרת אי-זוגית (n אי-זוגי), אנו יודעים שהוא חיובי. לפי תכונה 2,

במחובר זה יש n (מס' אי-זוגי) גורמי $g^{(m)}$ (תמיד שליליים). לכן מכפלתם שלילית, ובסה"כ חיובי × שלילי = שלילי.

מסקנה: בכל הנגזרות של $f(g(x))$ כל המחוברים שליליים, ולכן כל הנגזרות שליליות.

<u>דוגמה:</u>

נחקור את סימן הנגזרות של הפונקציה $\arcsin(\frac{1}{e^x-3})$ בנקודה $x=0$.

זו פונקציה מורכבת, כאשר: $g(x)=\frac{1}{e^x-3}$; $f(y)=\arcsin(y)$.

ניתן להציג את $g(x)$ באופן הבא: $g(x)=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{e^x}{3}}=-\frac{1}{3}(1+\frac{e^x}{3}+\frac{e^{2x}}{9}+...)$

מהצגה זו קל לראות, כי כל הנגזרות של $g(x)$, הן שליליות, ובפרט – בנקודה $x=0$.

כמו-כן ברור מהפיתוח הבא $\arcsin(y)=y+\frac{1}{6}y^3+\frac{3}{40}y^5+\frac{5}{112}y^7+\frac{35}{1152}y^9+...$,

כי עבור כל $y\in(-1,0)$ (ובפרט – עבור $y=g(0)=\frac{1}{e^0-3}=-\frac{1}{2}$) הנגזרות הזוגיות של $f(y)$ הן שליליות, והנגזרות האי-זוגיות הן חיוביות.

לפי מסקנה (ג) נסיק, כי כל הנגזרות של $\arcsin(\frac{1}{e^x-3})$ שליליות בנקודה $x=0$.

מקרה ד'

נניח, כי מחקירה של הפונקציות f(y) ו-g(x) קיבלנו:

בנקודה x_0 הנגזרות הזוגיות של *g(x)* חיוביות, והנגזרות האי-זוגיות שליליות.
בנקודה $g(x_0)$ כל הנגזרות של *f(y)* הן חיוביות.

מסקנה לגבי f(g(x)) :

בנקודה x_0 כל הנגזרות הזוגיות של $f(g(x))$ הן חיוביות, וכל הנגזרות האי-זוגיות הן שליליות.

הפונקציה	בנקודה	סימן הנגזרות	
		הזוגיות	האי-זוגיות
$g(x)$	$x=x_0$	+	–
$f(y)$	$y=g(x_0)$	+	+
$f(g(x))$	$x=x_0$	+	–

הוכחה:

ננתח את הנגזרת ה-k-ית של $f(g(x))$. לפי תכונה 1 מספר הגזירות לפי $g(x)$ בכל מחובר שווה ל-k. נוכיח, כי הסימן של כל מחובר נקבע לפי הזוגיות של k.

כל מחובר מכיל גורם $f^{(n)}$ (תמיד חיובי), ולפי תכונה 2 גם מכפלה של n גורמי $g^{(m)}$.

לכן k הגזירות לפי $g(x)$ מתחלקות בין n גורמי $g^{(m)}$ הללו. כל גורם $g^{(m)}$ מופיע בנגזרת ראשונה, לכל הפחות, ולכן ניתן להציג את מכפלת גורמי $g^{(m)}$ באופן הבא:

$g^{(1+r_1)}\cdot g^{(1+r_2)}\cdot\ldots\cdot g^{(1+r_n)}$ $(*)$, כאשר $\sum_{i=1}^{n}(1+r_i)=k$.

נתון, כי לכל שתי נגזרות עוקבות של פונקציה $g(x)$ יש סימנים שונים, כאשר $g'(x)$ שלילית. לכן הסימן של גורם $g^{(1+r_i)}$ נקבע לפי r_i החלפות סימן, כאשר מתחילים מסימן "-". את הסימן של המכפלה $(*)$ ניתן לקבוע לפי הסימן של המכפלה $\underbrace{g'\cdot\ldots\cdot g'}_{n}$ $(**)$, ואז החלפתו $\sum_{i=1}^{n} r_i=k-n$ פעמים.

(*i*) אם k זוגי בכל מחובר מתקיים הכלל: אם n זוגי, אז המכפלה $(**)$ חיובית, ו-$k-n$ מספר זוגי. לכן לאחר $k-n$ החלפות סימן, המכפלה $(*)$ תהיה חיובית. אם n אי-זוגי, אז המכפלה $(**)$ שלילית, ו-$k-n$ מספר אי-זוגי. לכן לאחר $k-n$ החלפות סימן – המכפלה $(*)$ תהיה חיובית.

(*ii*) (*ii*)אם k אי-זוגי בכל מחובר, מתקיים הכלל: אם n זוגי, אז המכפלה $(**)$ חיובית, ו-$k-n$ מספר אי-זוגי. לכן לאחר $k-n$ החלפות סימן – המכפלה $(*)$ תהיה שלילית. אם n אי-זוגי, אז המכפלה $(**)$ שלילית, ו-$k-n$ מספר זוגי. לכן לאחר $k-n$ החלפות סימן, המכפלה $(*)$ תהיה שלילית.

<u>דוגמה:</u>

נחקור את סימן הנגזרות של הפונקציה $e^{\frac{x}{x-1}}$ בנקודה $x=2$.

זו פונקציה מורכבת, כאשר: $g(x)=\dfrac{x}{x-1}$; $f(y)=e^y$.

עבור $|x|>1$ ניתן להציג את $g(x)$ באופן הבא: $g(x)=\dfrac{1}{1-\frac{1}{x}}=1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}+\ldots$

ומכאן: $g'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{3}{x^4}-\ldots$; $g''(x)=\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{6}{x^4}+\dfrac{12}{x^5}+\ldots$ וכו'.

קל לראות, כי עבור $x>1$ (ובפרט – עבור $x=2$) הנגזרות הזוגיות של $g(x)$ הן חיוביות, והנגזרות האי-זוגיות הן שליליות. כל הנגזרות של $f(y)=e^y$ חיוביות, ומכאן לפי מסקנה (ד), נסיק, כי בנקודה $x=2$ כל הנגזרות הזוגיות של $e^{\frac{x}{x-1}}$ הן חיוביות, וכל הנגזרות האי-זוגיות הן שליליות.

נראה את נכונות המסקנה על-ידי חישוב ישיר:

$$\left(e^{\frac{x}{x-1}}\right)' = \left(\frac{1}{x-1}-\frac{x}{(x-1)^2}\right)e^{\frac{x}{x-1}} \qquad \Rightarrow \left(e^{\frac{x}{x-1}}\right)'_{x=2} = \mathbf{-7.389}$$

$$\left(e^{\frac{x}{x-1}}\right)'' = \left(\frac{1}{x-1}-\frac{x}{(x-1)^2}\right)^2 e^{\frac{x}{x-1}} + \left(\frac{2x}{(x-1)^3}-\frac{2}{(x-1)^2}\right)e^{\frac{x}{x-1}} \qquad \Rightarrow \left(e^{\frac{x}{x-1}}\right)''_{x=2} = \mathbf{22.167}$$

$$\left(e^{\frac{x}{x-1}}\right)''' = \left(\frac{1}{x-1}-\frac{x}{(x-1)^2}\right)^3 e^{\frac{x}{x-1}} + 3\left(\frac{2x}{(x-1)^3}-\frac{2}{(x-1)^2}\right)\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x}{(x-1)^2}\right)e^{\frac{x}{x-1}} +$$

$$+\left(\frac{6}{(x-1)^3}-\frac{6x}{(x-1)^4}\right)e^{\frac{x}{x-1}} \qquad \Rightarrow \left(e^{\frac{x}{x-1}}\right)'''_{x=2} = \mathbf{-96.057}$$

מקרה ה'

נניח, כי מחקירה של הפונקציות $f(y)$ ו-$g(x)$ קיבלנו:

הפונקציה	בנקודה	סימן הנגזרות	
		הזוגיות	האי-זוגיות
$g(x)$	$x=x_0$	+	–
$f(y)$	$y=g(x_0)$	–	–
$f(g(x))$	$x=x_0$	–	+

בנקודה x_0 הנגזרות הזוגיות של *g(x)* הן חיוביות, והנגזרות האי-זוגיות הן שליליות.

בנקודה $g(x_0)$ כל הנגזרות של *f(y)* הן שליליות.

מסקנה לגבי f(g(x)): בנקודה x_0 כל הנגזרות הזוגיות של $f(g(x))$ הן שליליות, וכל הנגזרות האי-זוגיות הן חיוביות.

הוכחה:

ההוכחה דומה להוכחה של מקרה (ד), כאשר בכל מחובר – הגורם $f^{(n)}$ מופיע עם סימן "-", ולכן הסימן של כל המחוברים מתחלף. נקבל, שאם k (הנגזרת של $f(g(x))$) זוגי, כל המחוברים הם שליליים, ולכן הנגזרת היא שלילית. אם k אי-זוגי, כל המחוברים הם חיוביים, ולכן הנגזרת היא חיובית.

<u>דוגמה:</u>

נתבונן בפונקציה $\frac{-1}{\sqrt{2-\cosh x}}$ בנקודה $x=-1$.

זו פונקציה מורכבת, כאשר: $g(x)=\cosh x$; $f(y)=\frac{-1}{\sqrt{2-y}}$.

כבר ראינו, כי עבור $x<0$ (ובפרט – עבור $x=-1$) הנגזרות של $g(x)=\cosh x$ מחליפות סימן, כאשר הנגזרות הן הזוגיות חיוביות, והאי-זוגיות הן שליליות.

קל לראות, כי הנגזרות של: $f(y)$: $f'(y)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{(2-y)^3}}$

$$f''(y)=-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{(2-y)^5}} \;\cdots$$

שליליות לכל $y<2$, ובפרט – בנקודה $y=\cosh(-1)=1.543$.

לכן לפי מסקנה (ה) נסיק, כי בנקודה $x=-1$ כל הנגזרות הזוגיות של הפונקציה $\frac{-1}{\sqrt{2-\cosh x}}$ הן שליליות, וכל הנגזרות האי-זוגיות הן חיוביות.

<u>הערה:</u> לגבי המקרה, שבו הנגזרות של *f(y)* עם סימן קבוע והנגזרות הזוגיות של *g(x)* שליליות, והנגזרות האי-זוגיות חיוביות, לא ניתן לקבוע את הסימן של $f(g(x))$.

מכפלת גורמי $g^{(m)}$ בנגזרת ראשונה היא חיובית לכל מספר של הגורמים. לכן מספר חילופי הסימן נקבע גם על-ידי הנגזרת של הגורם $f^{(n)}$ וגם על-ידי הנגזרת של $f(g(x))$ (קובע את מספר הגזירות לפי גורמי $g^{(m)}$).

בכל מחובר אין תלות בין הנגזרת של $f^{(n)}$ לבין הנגזרת של $f(g(x))$, ולכן לא ניתן לקבוע את סימן הנגזרת.

מקרה ו'

נניח, כי מחקירה של הפונקציות *f(y)* ו-*g(x)* קיבלנו:

בנקודה x_0 הנגזרות הזוגיות של *g(x)* הן שליליות, והנגזרות האי-זוגיות הן חיוביות. בנקודה $g(x_0)$ הנגזרות הזוגיות של *f(x)* הן חיוביות, והנגזרות האי-זוגיות הן שליליות.

מסקנה לגבי f(g(x)): בנקודה x_0 כל הנגזרות הזוגיות של $f(g(x))$ הן חיוביות, וכל הנגזרות האי-זוגיות הן שליליות.

הפונקציה	בנקודה	סימן הנגזרות	
		הזוגיות	האי-זוגיות
$g(x)$	$x=x_0$	$-$	$+$
$f(y)$	$y=g(x_0)$	$+$	$-$
$f(g(x))$	$x=x_0$	$+$	$-$

הוכחה:

בנגזרת ה-*k*-ית של $f(g(x))$ כל מחובר מורכב מגורם $f^{(n)}$ בנגזרת מסוימת ומכפלה של גורמי $g^{(m)}$. נתון, שכאשר *n* זוגי, $f^{(n)}$ חיובי, וכאשר *n* אי-זוגי, $f^{(n)}$ שלילי. לפי תכונה 1 מכפלת גורמי $g^{(m)}$ מכילה *k* גזירות לפי $g(x)$. כמו שהוסבר בהוכחה (ד), הסימן של מכפלת גורמי $g^{(m)}$ נקבע לפי הסימן של $\underbrace{g'\cdot\ldots\cdot g'}_{n}$, ואחר כך $k-n$ החלפות סימן. מהנתון נובע, כי g' חיובית, ולכן המכפלה $\underbrace{g'\cdot\ldots\cdot g'}_{n}$ היא תמיד חיובית. מכאן, שבכל מחובר – הסימן של מכפלת גורמי $g^{(m)}$ נקבע לפי הזוגיות של $k-n$ באופן הבא:

מתחילים מסימן "+": כאשר $k-n$ זוגי, יהיה מספר זוגי של החלפות סימן, ולכן מכפלת גורמי $g^{(m)}$ תהיה חיובית. כאשר $k-n$ אי-זוגי, יהיה מספר אי-זוגי של החלפות סימן, ולכן מכפלת גורמי $g^{(m)}$ תהיה שלילית.

נוכיח, כי סימן הנגזרת ה-*k*-ית של $f(g(x))$ נקבע לפי הזוגיות של *k*.

(*i*) אם *k* זוגי: אם *n* זוגי, אז $k-n$ זוגי, ולכן $f^{(n)}$ חיובי, וגם מכפלת גורמי $g^{(m)}$ חיובית. סימן המחובר הוא: חיובי × חיובי = חיובי. אם *n* אי-זוגי, אז $k-n$ אי-זוגי, ולכן $f^{(n)}$ שלילי, וגם מכפלת גורמי $g^{(m)}$ שלילית. סימן המחובר הוא: שלילי × שלילי = חיובי.
מסקנה: כאשר *k* זוגי, כל המחוברים הם חיוביים.

(*ii*) אם *k* אי-זוגי: אם *n* זוגי, אז $k-n$ אי-זוגי, ולכן $f^{(n)}$ חיובי, ומכפלת גורמי $g^{(m)}$ שלילית.

סימן המחובר הוא: חיובי × שלילי = שלילי. אם n אי-זוגי, אז $k-n$ זוגי, ולכן $f^{(n)}$ שלילי, ומכפלת גורמי $g^{(m)}$ חיובית. סימן המחובר הוא: שלילי × חיובי = שלילי.

מסקנה: כאשר k אי-זוגי, כל המחוברים הם שליליים.

דוגמה:

אנו מעוניינים לקבוע את סימן הנגזרות ה-13 ו-22 של $\left(\sinh x\right)^{100}$ בנקודה $x=-1$.

זו פונקציה מורכבת, כאשר: $g(x)=\sinh x$; $f(y)=y^{100}$.

מהנגזרות $g'(x)=\cosh x$; $g''(x)=\sinh x$ אנו רואים, כי עבור $x<0$ (ובפרט – עבור $x=-1$) הפונקציה $g(x)$ וכל הנגזרות הזוגיות שלה הן שליליות, והנגזרות האי-זוגיות הן חיוביות.

קל לראות, כי לכל $y<0$ (ובפרט – בנקודה $y=\sinh(-1)=-1.175$) עד הנגזרת ה-100 כל הנגזרות הזוגיות הן חיוביות, והנגזרות האי-זוגיות הן שליליות.[1]

לפי מסקנה (ו), נסיק כי בנקודה $x=-1$ הנגזרת ה-13 של $\left(\sinh x\right)^{100}$ היא שלילית, והנגזרת ה-22 היא חיובית.

מקרה ז'

נניח, כי מחקירה של הפונקציות f(y) ו g(x) קיבלנו:

בנקודה x_0 הנגזרות הזוגיות של *g(x)* הן שליליות, והנגזרות האי-זוגיות הן חיוביות. בנקודה $g(x_0)$ הנגזרות הזוגיות של *f(y)* הן שליליות, והנגזרות האי-זוגיות הן חיוביות.

מסקנה לגבי f(g(x)): בנקודה x_0 כל נגזרות הזוגיות של $f(g(x))$ הן שליליות, וכל נגזרות האי-זוגיות הן חיוביות.

הפונקציה	בנקודה	סימן הנגזרות	
		הזוגיות	האי-זוגיות
$g(x)$	$x=x_0$	$-$	$+$
$f(y)$	$y=g(x_0)$	$-$	$+$
$f(g(x))$	$x=x_0$	$-$	$+$

1. במקרה זה הדרישה להחלפת סימן של f(y) מתקיימת רק עבור 100 הנגזרות הראשונות. עובדה זו אינה גורמת לבעיה, כי אנחנו מעוניינים בסימני הנגזרת ה-k-ית (k<100) של f(g(x)), וברור, כי בכל נגזרת ה-k-ית הנגזרת המקסימלית, שבה יופיעו גורמי $g^{(m)}$ ו- $f^{(n)}$ היא k.

הוכחה:

בנגזרת ה k-ית של $f(g(x))$ בכל מחובר מתקיים הכלל הבא: כאשר n זוגי, $f^{(n)}$ שלילי, וכאשר n אי-זוגי, $f^{(n)}$ חיובי. הנתונים לגבי הפונקציה $g(x)$ זהים למקרה (ו), ולכן מתקבלות אותן מסקנות על הסימן של מכפלת גורמי $g^{(m)}$, כלומר כאשר $k-n$ זוגי, מכפלת גורמי $g^{(m)}$ היא חיובית; כאשר $k-n$ אי-זוגי, מכפלת גורמי $g^{(m)}$ היא שלילית.

(*i*) אם k זוגי: אם n זוגי, אז $k-n$ זוגי, ולכן $f^{(n)}$ שלילי, ומכפלת גורמי $g^{(m)}$ היא חיובית.
סימן המחובר הוא: שלילי × חיובי = שלילי. אם n אי-זוגי, אז $k-n$ אי-זוגי, ולכן $f^{(n)}$ חיובי, ומכפלת גורמי $g^{(m)}$ היא שלילית. סימן המחובר הוא: חיובי × שלילי = שלילי.
מסקנה: כאשר k זוגי, כל המחוברים הם שליליים.

(*ii*) אם k אי-זוגי: אם n זוגי, אז $k-n$ אי-זוגי, ולכן $f^{(n)}$ שלילי, וגם מכפלת גורמי $g^{(m)}$ שלילית. סימן המחובר הוא: שלילי × שלילי = חיובי. אם n אי-זוגי, אז $k-n$ זוגי, ולכן $f^{(n)}$ חיובי, ומכפלת גורמי $g^{(m)}$ חיובית. סימן המחובר הוא: חיובי × חיובי = חיובי.
מסקנה: כאשר k אי-זוגי, כל המחוברים חיוביים.

<u>דוגמה:</u>

נחקור את סימן הנגזרות של הפונקציה $\frac{x^2}{1-x^2}e^{\frac{x^2}{x^2-1}}$ בנקודה $x=1.5$.

זו פונקציה מורכבת, כאשר: $g(x)=\frac{x^2}{1-x^2}\ ;\ f(y)=ye^{-y}$.

עבור $|x|>1$ ניתן להציג את $g(x)$ באופן הבא:

$$g(x)=\frac{-1}{1-\frac{1}{x^2}}=-\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^8}+...\right)$$

מהנגזרות $g'(x)=\frac{2}{x^3}+\frac{4}{x^5}+\frac{6}{x^7}+...\ ;\qquad g''(x)=-\frac{6}{x^4}-\frac{20}{x^6}-\frac{42}{x^8}-...$ ברור, כי הנגזרות הזוגיות הן שליליות, והנגזרות האי-זוגיות הן חיוביות.

מהנגזרות $f'(y)=(1-y)e^{-y}\ ;\qquad f''(y)=(y-2)e^{-y}$

$f'''(y)=(3-y)e^{-y}\ ;\qquad f^{(4)}(y)=(y-4)e^{-y}$

אנו רואים, כי לכל $y<0$ (ובפרט – בנקודה $y=g(1.5)=\frac{1.5^2}{1-1.5^2}=-1.8$) כל הנגזרות הזוגיות של $f(y)=ye^{-y}$ הן שליליות, וכל הנגזרות האי-זוגיות הן חיוביות.

לפי מסקנה (ז) נסיק, כי בנקודה $x=1.5$ הנגזרות הזוגיות של $\frac{x^2}{1-x^2}e^{\frac{x^2}{x^2-1}}$ הן שליליות, והנגזרות האי-זוגיות הן חיוביות.

<u>**הערה:**</u> לגבי המקרה, שבו הנגזרות של *f(y)* מחליפות סימן, והנגזרות הזוגיות של *g(x)* חיוביות, והנגזרות האי-זוגיות שליליות – לא ניתן לקבוע את הסימן של $f(g(x))$.

נסכם את התוצאות לגבי התאפסות הנגזרות של הפונקציה המורכבת:

נניח, כי מחקירת הפונקציות *f(y)* ו *g(x)* קיבלנו	מסקנה לגבי **f(g(x))**:
f(y) מתאפסת בנקודה $g(x_0)$ ב-*p-1* נגזרות ראשונות, ולא מתאפסת בנגזרת ה-*p*. *g(x)* מתאפסת בנקודה x_0 ב-*p-1* נגזרות ראשונות, ולא מתאפסת בנגזרת ה-*q*.	$f(g(x))$ מתאפסת בנקודה x_0 ב-$(pq-1)$ נגזרות הראשונות, ולא מתאפסת בנגזרת ה-*pq*.
כל הנגזרות של *f(y)* הן חיוביות בנקודה $g(x_0)$, וכל הנגזרות של *g(x)* הן חיוביות בנקודה x_0.	בנקודה x_0 כל הנגזרות של $f(g(x))$ הן חיוביות.
בנקודה $g(x_0)$ הנגזרות הזוגיות של *f(y)* הן חיוביות, והנגזרות האי-זוגיות של *f(y)* הן שליליות. בנקודה x_0 כל הנגזרות של *g(x)* הן שליליות.	בנקודה x_0 כל הנגזרות של $f(g(x))$ חיובית.
בנקודה $g(x_0)$ הנגזרות הזוגיות של *f(y)* הן שליליות, והנגזרות האי-זוגיות של *f(y)* חיוביות. בנקודה x_0 כל הנגזרות של *g(x)* הן שליליות.	בנקודה x_0 כל הנגזרות של $f(g(x))$ שליליות.
בנקודה $g(x_0)$ כל הנגזרות של *f(y)* הן חיוביות. בנקודה x_0 הנגזרות הזוגיות של*g(x)* הן חיוביות, והנגזרות האי-זוגיות הן שליליות.	בנקודה x_0 כל הנגזרות הזוגיות של $f(g(x))$ הן חיוביות, וכל הנגזרות האי-זוגיות הן שליליות.
בנקודה $g(x_0)$ כל הנגזרות של *f(y)* הן שליליות. בנקודה x_0 הנגזרות הזוגיות של*g(x)* הן חיוביות, והנגזרות האי-זוגיות הן שליליות.	בנקודה x_0 כל הנגזרות הזוגיות של $f(g(x))$ הן שליליות, וכל הנגזרות האי-זוגיות הן חיוביות.
בנקודה $g(x_0)$ הנגזרות הזוגיות של *f(y)* הן	בנקודה x_0 כל הנגזרת הזוגיות

נניח, כי מחקירת הפונקציות $g(x)$ ו $f(y)$ קיבלנו	מסקנה לגבי $\mathbf{f(g(x))}$:
חיוביות, והנגזרות האי-זוגיות הן שליליות. בנקודה x_0 הנגזרות הזוגיות של $g(x)$ הן שליליות, והנגזרות האי-זוגיות הן חיוביות.	של $f(g(x))$ הן חיוביות, וכל הנגזרות האי-זוגיות הן שליליות.
בנקודה $g(x_0)$ הנגזרות הזוגיות של $f(y)$ הן ליליות, והנגזרות האי-זוגיות הן חיוביות. בנקודה x_0 הנגזרות הזוגיות של $g(x)$ שליליות, והנגזרות האי-זוגיות חיוביות.	בנקודה x_0 כל הנגזרות הזוגיות של $f(g(x))$ הן שליליות, וכל הנגזרות האי-זוגיות הן חיוביות.

סיכום

בתחומים רבים במתמטיקה החל מחקירת פונקציות הנלמדת בתיכון (מציאת נקודות קיצון ופיתול) וכלה בנושאים מתקדמים באנליזה נומרית ובגאומטריה דיפרנציאלית – חשוב לענות על השאלות הבאות:

(i) האם הנגזרת ה-n-ית של הפונקציה $h(x)$ מתאפסת בנקודה x_0 ?

(ii) מהו הסימן של הנגזרת ה-n-ית של הפונקציה $h(x)$ בנקודה x_0 או בקטע $[a,b]$?

אם $h(x)$ היא פונקציה מורכבת ($h(x)=f(g(x))$), הרי מציאת התשובות על השאלות הללו כרוכה במאמץ רב, שכן בגזירת מספר פעמים של פונקציה מורכבת – מתקבלים ביטויים ענקיים. במאמר זה אנו מציגים שיטה אלטרנטיבית, שלפיה הרבה יותר קל לענות על השאלות הללו. לצורך זה אנו מנסחים ומוכיחים שתי תכונות, המקשרות את הנגזרות של הפונקציה המורכבת $h(x)$ עם הנגזרות של מרכיביה $g(x)$ ו- $f(y)$.

אנו מדגימים ומוכיחים, כיצד בעזרת התכונות הללו וחקירת הנגזרות של הפונקציות $g(x)$ ו- $f(y)$ בנפרד – ניתן לענות על השאלות הנ"ל בקלות. בנוסף, כולל המאמר מספר גדול של דוגמאות, המדגימות שימוש בכל המסקנות המתקבלות.

ביבליוגרפיה

ברגר, ש', הרצמן, י', לוין, א', סמט, ד' ופיטובסקי, א' (1984). *חשבון אינפיניטסימלי II: כרך ד יחידה 6* (מהדורה מתוקנת). תל-אביב: האוניברסיטה הפתוחה.

ברגר, ש', הרצמן, י', לוין, א', סמט, ד' ופיטובסקי, א' (1985). *חשבון אינפיניטסימלי II: כרך ג יחידה 5* (מהדורה מתוקנת). תל-אביב: האוניברסיטה הפתוחה.

ברגר, ש', הרצמן, י', לוין, א', סמט, ד' ופיטובסקי, א' (1989). *חשבון אינפיניטסימלי II: כרך ה יחידות 7, 8* (מהדורה מתוקנת). תל-אביב: האוניברסיטה הפתוחה.

גורן, ב' (1991). *חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי (4 ו-5 יחידות לימוד)*. תל-אביב: המחבר.

גינזבורג, א' (1994). *מתמטיקה דיסקרטית: IV. קומבינטוריקה* (מהדורה מתוקנת). תל-אביב: האוניברסיטה הפתוחה.

Anton, H. (1995). *Calculus with analytic geometry* (5th ed.). New York: Wiley.

Bruce, J. W., & Giblin, P. J. (1992). *Curves and singularities* (2nd ed.). Cambridge: Cambridge University Press.

Dahlquist, G. L., & Bjorck, A. (1974). *Numerical methods* (N. Anderson, Trans.). Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.