שלשות פיתגוריות – "תבלינים מתמטיים" – מעולמה הקסום של המתמטיקה

תקציר

שלשות פיתגוריות מהוות אבני-יסוד באלגברה ובהנדסה, ונעשה שימוש בהן בתחומי-תכנון שונים.

מוצגות שתי דרכים לבניית שלשות פיתגוריות, שהראשונה היא מקרה פרטי של הדרך השנייה.

מובאים מאפייני המספרים, המרכיבים את השלשות הפיתגוריות היסודיות, כולל ההוכחות האלגבריות של מרביתן.

מודגש הקשר שבין השלשות הפיתגוריות לבין משפט-פיתגורס.

בסיום המאמר מוצגות בעיות אחדות של מציאת שלשות פיתגוריות מסוימות – בצירוף פתרונותיהן.

הקדמה

שלשות פיתגוריות ומשפט-פיתגורס (ויקיפדיה, 2010) מהווים אבני-יסוד באלגברה ובהנדסה מאז ימי המתמטיקאים הקדמונים – החל מהמאות האחרונות שלפני הספירה. שימוש בהן נעשה בכל תכנון הנדסי של מבנה – הן בשטחים חקלאיים והן בבניית דרכים.

תלמידים נפגשים לראשונה עם שלשות פיתגוריות ועם משפט-פיתגורס כבר בכיתות הגבוהות של בית הספר היסודי – כחומר לימודי, ולפחות, כחומר העשרה לתלמידים מתקדמים. בשלבי-הלימוד בבית הספר התיכון, בכל הרמות של בחינות-הבגרות במתמטיקה – מופיע השימוש במשפט-פיתגורס בכל התחומים: אלגברה, הנדסת-המישור, הנדסת-המרחב, הנדסה אנליטית, טריגונומטריה וחדו"א.

מילות מפתח: *שלשות פיתגוריות: יסודיות ותולדות; מאפייני שלשות פיתגוריות; משפט פיתגורס.*

לשם השבחה והעשרה של הידע המתמטי – הצגנו במאמר זה שתי "מכונות" לבניית שלשות פיתגוריות יסודיות וקבלת התולדות של שלשות אלה, והבאנו הוכחות למאפיינים השונים של שלשות פיתגוריות יסודיות. לשם הבלטת יופייה של המתמטיקה – שילבנו במאמר משימות אחדות למציאת שלשות פיתגוריות מסוימות. לחלק מהמשימות ניתנו פתרונות מלאים או הדרכות ורמזים.

שלשות פיתגוריות

שלושה מספרים טבעיים *(a, b, c)*, שביניהם קיים הקשר $a^2+b^2=c^2$, נקראים שלשה פיתגורית.

מבחינים בין שני סוגי שלשות פיתגוריות: שלשה פיתגורית יסודית (פרימיטיבית) ושלשה פיתגורית, שהיא תולדה של שלשה פיתגורית יסודית.

שלשה פיתגורית יסודית היא שלשה של מספרים זרים *(a, b, c)*, שלא ניתן לחלק את איבריה במספר טבעי כלשהו שונה מ-1.

לדוגמה: *(5, 12, 13)* היא שלשה פיתגורית יסודית, ואילו השלשה *(20, 48, 52)* היא תולדה שלה, והיא התקבלה על-ידי הכפלת איברי השלשה היסודית ב-4.

ישנן אינסוף שלשות פיתגוריות יסודיות. הכפלת איברי שלשה פיתגורית יסודית במספר טבעי כלשהו (גדול מ-1) נותנת תולדה שלה, וכך ניתן לקבל אינסוף שלשות תולדות לכל שלשה יסודית. כלומר, אם *(a, b, c)* היא שלשה פיתגורית יסודית ו-*k* מספר טבעי *(k>1)*, אז *(ak, bk, ck)* היא תולדה של השלשה הפיתגורית היסודית, כי אם $a^2+b^2=c^2$, הרי מתקיים גם: $(ak)^2+(bk)^2=(ck)^2$.

בניית שלשות פיתגוריות

דרך א'

נבחר שני מספרים טבעיים, שההפרש ביניהם הוא 2. סכום המספרים, מכפלת המספרים ומכפלת המספרים בתוספת 2 – מהווה שלשה פיתגורית.

כלומר,

השלשה, הנבנית מזוג המספרים $(n,\ n+2)$ באופן הבא:

$n(n+2)+2,\ n(n+2),\ (n+n+2)$, מהווה שלשה פיתגורית. על-ידי פעולה אלגברית של פתיחת-סוגריים וכינוס-איברים – ניתן להראות בקלות את השוויון הבא:

$$\left[2(n+1)\right]^2+\left[n(n+2)\right]^2=\left[n(n+2)+2\right]^2$$

להלן מספר דוגמאות:

השלשה המתקבלת	זוג המספרים
$(3,4,5)$	$(1,3)$
$(6,8,10) \Rightarrow (3,4,5)$	$(2,4)$
$(8,15,17)$	$(3,5)$
$(10,24,26) \Rightarrow (5,12,13)$	$(4,6)$
$(12,35,37)$	$(5,7)$
$(14,48,50) \Rightarrow (7,24,25)$	$(6,8)$
$(16,63,65)$	$(7,9)$
$(18,80,82) \Rightarrow (9,40,41)$	$(8,10)$
$(20,99,101)$	$(9,11)$
$(22,120,122) \Rightarrow (21,60,61)$	$(10,12)$

הערה:

כאשר n- אי-זוגי, מתקבלת שלשה יסודית בהפרש 2 בין שני מספריה האי-זוגיים (כי שני מספרים אי-זוגיים עוקבים הם תמיד זרים). אם n- זוגי, אז מתקבלת שלשה לא-יסודית, שכל איבריה זוגיים. חלוקת איבריה ב-2 נותנת שלשה יסודית בהפרש של 1 בין איבריה הגדולים.

בדרך א' מתקבלות שלשות פיתגוריות יסודיות או תולדות שלהן, אך לא מתקבלות כל השלשות היסודיות האפשריות. למשל, את השלשות $(20,21,29)$ ו-$(33,56,65)$ לא ניתן לבנות באמצעות דרך א'.

דרך ב'

נבחר שני מספרים טבעיים כלשהם: n ו-m כאשר $n>m$. השלשה $\left(n^2-m^2,\ 2mn,\ n^2+m^2\right)$ מהווה שלשה פיתגורית. גם כאן על-ידי פעולה אלגברית פשוטה – נוכל להוכיח את השוויון הבא: $\left(n^2-m^2\right)^2+\left(2mn\right)^2=\left(n^2+m^2\right)^2$.

להלן מספר דוגמאות:

השלשה המתקבלת	זוג המספרים
$(20, 21, 29)$	$(2, 5)$
$(24, 32, 40) \Rightarrow (3, 4, 5)$	$(2, 6)$
$(48, 55, 73)$	$(3, 8)$
$(65, 72, 97)$	$(4, 9)$

קיימת הוכחה (ויקיפדיה, 2010), שעל-ידי שימוש בדרך ב', תוך בחירת שני בני זוג זרים, שאחד מהם מספר זוגי והשני מספר אי-זוגי – ניתן לקבל את כל השלשות הפיתגוריות היסודיות האפשריות.

ראוי לציין, שבעזרת נוסחאות קשר אפשר להראות, כי דרך א' היא מקרה פרטי של דרך ב'.

מאפיינים של שלשות פיתגוריות

* אין שלשות פיתגוריות, שבהן שני המספרים הקטנים הם אי-זוגיים.

לפי בניית שלשות בדרך א':

$\left(2(n+1),\ n(n+2),\ n(n+2)+2\right)$ רואים, שלפחות איבר אחד, האיבר $2(n+1)$, הוא תמיד זוגי. אם n הוא מספר זוגי, גם האיברים $n(n+2)$ ו- $n(n+2)+2$ יהיו מספרים זוגיים.

לפי בניית שלשות בדרך ב':

$\left(n^2-m^2,\ 2mn,\ n^2+m^2\right)$ האיבר האמצעי $2mn$ הוא תמיד זוגי – ללא תלות בזוגיות של m או n.

אם n **<u>וגם</u>** m הם מספרים אי-זוגיים, אז האיברים $\left(n^2-m^2\right)$ ו-$\left(n^2+m^2\right)$ הם מספרים זוגיים (לפי תכונת חיבור וחיסור של מספרים אי-זוגיים), כלומר במקרה זה כל השלשות מורכבות ממספרים זוגיים, והן אינן שלשות יסודיות, באותו אופן אם n ו-m הם מספרים זוגיים, תהא השלשה מורכבת רק ממספרים זוגיים, ולא תתקבל שלשה יסודית.

אם n מספר זוגי ו-m מספר אי-זוגי (או להפך), יהיו האיברים $\left(n^2-m^2\right)$ ו-$\left(n^2+m^2\right)$ מספרים אי-זוגיים (לפי תכונת החיבור והחיסור של שני מספרים בעלי זוגיות שונה).

את האפיון הנ"ל של השלשה הפיתגורית, המתקבלת בדרך ב' – נוכל לנמק בדרך קצרה יותר: לביטויים $\left(n^2-m^2\right)$ ו- $\left(n^2+m^2\right)$ ישנה אותה זוגיות, ולכן בשלשה היסודית הם חייבים

להיות אי-זוגיים.

מסקנה: כדי לקבל שלשה יסודית – הכרחי (אך לא מספיק), ש-m ו- n יהיו שונים בזוגיות.

מהתבוננות בערכי המספרים המרכיבים את השלשות היסודיות – מבחינים במאפיינים הבאים:

1. בכל שלשה יש מספר זוגי אחד שמתחלק ב-4.
2. בכל שלשה יש מספר אחד המתחלק ב-3.
3. בכל שלשה יש מספר אחד המתחלק ב-5.
4. ישנן שלשות, שבהן אחד המספרים בלבד הוא ראשוני, ושני האחרים פריקים (לדוגמה: $(9, 40, 41)$).
5. ישנן שלשות, שבהן שניים מהמספרים הם ראשוניים, ואילו השלישי פריק (לדוגמה: $(11, 60, 61)$).
6. ישנן שלשות יסודיות, שכל אחד מהמספרים שלהן הוא פריק (לדוגמה $16, 63, 65$), אך הם זרים זה לזה, כי מדובר בשלשות יסודיות.

הוכחת המאפיין, שבכל שלשה – מספר אחד בלבד מתחלק ב-5

- מספר n המתחלק ב-5 – צורתו $5k$ (k מספר טבעי).
- מספר n, המתחלק ב-5 ונותרת שארית 1 – צורתו $5k+1$.
- מספר n, המתחלק ב-5 ונותרת שארית 2 – צורתו $5k+2$.
- מספר n, המתחלק ב-5 ונותרת שארית 3 – צורתו $5k+3$.
- מספר n, המתחלק ב-5 ונותרת שארית 4 – צורתו $5k+4$.

נציב ערכים אלו באיברי השלשות (דרך א' ודרך ב') של "המכונות" לשם יצירת שלשות פיתגוריות.

בדרך א' איברי השלשה הם: $\left(2(n+1),\ n(n+2),\ n(n+2)+2\right)$

- עבור $n=5k$ האיבר האמצעי מתחלק ב-5.
- עבור $n=5k+1$ האיבר הימני, שערכו $25k^2+20k+5$, מתחלק ב-5.
- עבור $n=5k+2$ האיבר הימני, שערכו $25k^2+30k+10$, מתחלק ב-5.
- עבור $n=5k+3$ האיבר האמצעי, שערכו $5(5k+3)(k+1)$, מתחלק ב-5.
- עבור $n=5k+4$ האיבר השמאלי, שערכו $10(k+1)$, מתחלק ב-5.

ניתן להראות בקלות, ששני האיברים האחרים עבור כל אחד מהמקרים אינם מתחלקים ב-5.

אנו מוכיחים, שבשלשות הפיתגוריות, הנבנות בדרך א', קיים תמיד איבר יחיד המתחלק ב-5.

בדרך ב׳ איברי השלשה הם: $\left(n^2-m^2,\ 2mn,\ n^2+m^2\right)$

רושמים את השלשה בצורה הבאה:

$$\left(\left(n+m\right)\left(n-m\right),\ 2mn,\ n^2+m^2\right)$$

- עבור n **<u>או</u>** m, המתחלקים ב-5 ללא שארית – האיבר האמצעי מתחלק ב-5.
- עבור n **ו-**m הבאים, כאשר k ו- l מספרים טבעיים

$n=5k+1$ **<u>וגם</u>** $m=5l+1$ נותנים שארית 1 בחלוקה ל-5.

<u>או</u>

$n=5k+2$ **<u>וגם</u>** $m=5l+2$ נותנים שארית 2 בחלוקה ל-5.

<u>או</u>

$n=5k+3$ **<u>וגם</u>** $m=5l+3$ נותנים שארית 3 בחלוקה ל-5.

<u>או</u>

$n=5k+4$ **<u>וגם</u>** $m=5l+4$ נותנים שארית *4* בחלוקה ל-5.

בקיצור, אם m ו- n משאירים אותה שארית בחלוקה ב-5, זאת אומרת, ש-$\left(n-m\right)$ מתחלק ב-5, ואז הביטוי השמאלי מתחלק ב-5.

- עבור $n=5k+1$ **<u>וגם</u>** $m=5l+3$ (גם ההפך מבחינת השאריות) – הביטוי הימני מתחלק ב-5, כי

$$n^2+m^2=\left(5k+1\right)^2+\left(5l+3\right)^2=5\left(5k^2+2k+5l^2+6l+2\right)$$

- עבור $n=5k+2$ **<u>וגם</u>** $m=5l+4$ (גם ההפך מבחינת השאריות) – הביטוי הימני מתחלק ב-5, כי

$$n^2+m^2=\left(5k+2\right)^2+\left(5l+4\right)^2=5\left(5k^2+4k+5l^2+8l+4\right)$$

- האפשרויות האחרות הן:

$n=5k+1$ **<u>וגם</u>** $m=5l+4$ (גם ההפך מבחינת השאריות) **<u>או</u>** $n=5k+2$ **<u>וגם</u>** $m=5l+3$ (גם ההפך מבחינת השאריות). בשני המקרים הללו הסכום של $n+m$ מתחלק ב-5, ולכן הביטוי השמאלי יתחלק ב-5.

מכאן אנו מוכיחים, כי בכל השלשות הפיתגוריות, הנבנות בדרך ב׳, קיים תמיד איבר המתחלק ב-5.

הוכחת המאפיין: בכל שלשה – מספר אחד בלבד מתחלק ב-3

בדרך א' איברי השלשה $\left(2(n+1),\ n(n+2),\ n(n+2)+2\right)$

- o עבור $n=3k$ האיבר האמצעי יתחלק תמיד ב-3.
- o עבור $n=3k+1$ האיבר האמצעי מתחלק ב-3, כי הגורם $n+2$ מתחלק ב-3.
- o עבור $n=3k+2$ האיבר השמאלי מתחלק ב-3.

הערה: האיבר הימני – תמיד אינו מתחלק ב-3.

בדרך ב' איברי השלשה $\left((n+m)(n-m),\ 2mn,\ n^2+m^2\right)$

- o עבור $n=3k$ **__או__** $m=3l$ האיבר האמצעי מתחלק ב-3.
- o עבור $n=3k+1$ **__וגם__** $m=3l+1$
- o עבור $n=3k+2$ **__וגם__** $m=3l+2$

(או בניסוח: אם m ו- n משאירים אותה שארית בחלוקה ב-3)

– הגורם $n-m$ שבאיבר השמאלי מתחלק ב-3.

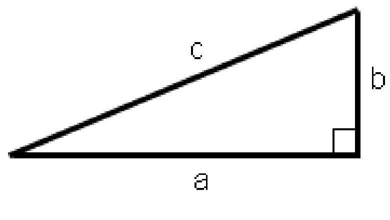
- o עבור $n=3k+1$ **__וגם__** $m=3l+2$ (וגם ההפך מבחינת השאריות) – הגורם $n+m$ שבאיבר השמאלי מתחלק ב-3.

אנו מוכיחים, שבכל השלשות הפיתגוריות, הנבנות בדרך א' או בדרך ב', קיים מספר אחד המתחלק ב-3.

את ההוכחה, שבכל שלשה קיים מספר המתחלק ב-4, אנו משאירים לקורא.

חשיבות השלשות הפיתגוריות

לפי משפט פיתגורס (בערך 490-570 לפה"ס), המספרים של השלשה הפיתגורית הם אורכי הצלעות של משולש ישר-זווית. שני המספרים הקטנים הם אורכי הניצבים, והמספר הגדול ביותר בשלשה הוא אורך היתר.



קשר זה היה ידוע לפני מאות שנים ושימש בתכנון חלקות חקלאיות ואף בתחומי בנייה.

משימה:

האם ייתכנו שני משולשים ישרי-זווית, שאינם חופפים, אך הם שווי-שטח, וצלעותיהם הן שלשות

פיתגוריות?

פתרון:

לפנינו השלשות הפיתגוריות *(a, b, c)* ו-*(d, e, f)*.

אנו מחפשים שלשות, המקיימות $S_\Delta = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{d \cdot e}{2}$, כלומר, מחפשים שני זוגות מספרים *(a, b)* ו-*(d, e)*, שכל אחד מהם שייך לשלשה פיתגורית, באופן שפירוק המכפלה $a \cdot b$ למספרים ראשוניים יהיה זהה לפירוק המכפלה $d \cdot e$.

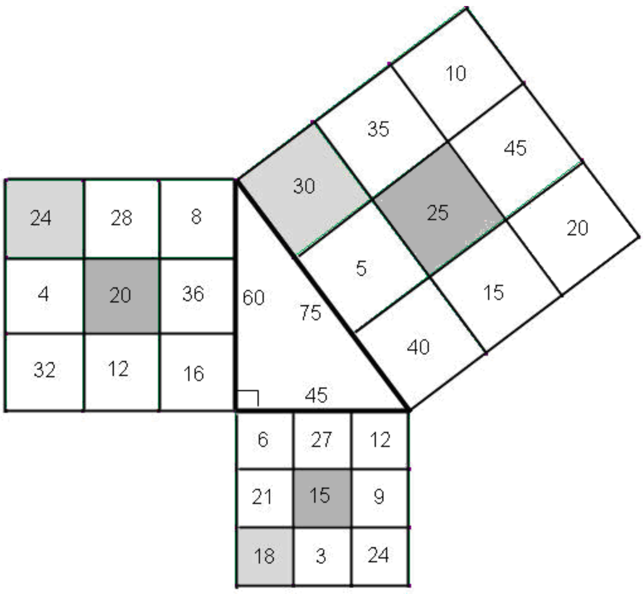
ברור, שאין לחפש מכפלות שוות, כאשר *d* זר ל-*a* וגם ל-*b*, וכן *e* זר ל-*a* וגם ל-*b*.

מבדיקת 25 השלשות הפיתגוריות היסודיות הקטנות ביותר – מתברר, שנמצא זוג אחד של שלשות, ההולמות את הדרישה. השלשות הן: $(20, 21, 29)$ ו-$(12, 35, 37)$, אשר למשולשים ישרי-הזווית המתאימים להן, ישנו אותו שטח: $S_\Delta = \frac{12 \cdot 35}{2} = \frac{20 \cdot 21}{2}$.

המסקנה נותרת לקורא!

משולש ישר-זווית, שאורכי צלעותיו מהווים שלשה פיתגורית, ועליהן בנויים ריבועי קסם מסדר 3X3

(מיטב, 2004, עמ' 474).



על משולש ישר-זווית, שאורכי צלעותיו הם *45, 60, 75* יחידות אורך, נבנו ריבועי-קסם, שהסכום האחיד של המספרים בכל שורה, בכל עמודה ובאלכסונים הראשיים – שווה לאורך הצלע, שהוא בנוי עליו.

מעוררת התפעלות היא העובדה, שהמספרים המתאימים בשלושת ריבועי הקסם מהווים אף הם שלשה פיתגורית.

המספרים בשלושת התאים, הצבועים בצבע אפור בהיר, ובשלושת התאים, הצבועים בצבע אפור כהה – מהווים שלשות פיתגוריות.

ההתאמה בין התאים המתאימים בשלושת הריבועים מתבלטת, כאשר הם מונחים באופן הבא:

$$\begin{bmatrix} 6 & 27 & 12 \\ 21 & 15 & 9 \\ 18 & 3 & 24 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 8 & 36 & 16 \\ 28 & 20 & 12 \\ 24 & 4 & 32 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 10 & 45 & 20 \\ 35 & 25 & 15 \\ 30 & 5 & 40 \end{bmatrix}^2$$

מתקבלות 9 שלשות פיתגוריות של השלשה היסודית *(3, 4, 5)* והתולדות שלה.

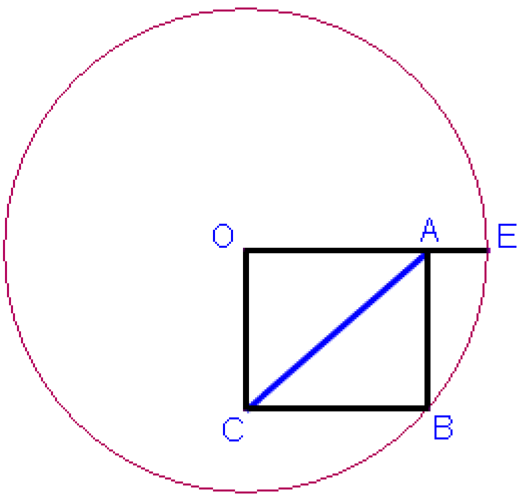
נוסף לכך, אם מחברים את הסכום של מספר משבצות כלשהו באחד הריבועים ומבצעים פעולה זו בתאים המתאימים בשני הריבועים האחרים, מקבלים שלושה מספרים, המהווים שלשה פיתגורית.

למעשה, יש 511 אפשרויות לבחור קבוצה של תאים ולחבר אותם לפי הנוסחה:

$$C_9^1 + C_9^2 + C_9^3 + \ldots + C_9^9 = 511$$

משימות של מציאת שלשות פיתגוריות מסוימות

א. $OABC$ הוא מלבן בתוך עיגול, באופן שקדקודו O הוא מרכז המעגל, והקדקוד B מצוי על היקף המעגל. נתון, שאורך אלכסון המלבן AC הוא 73 מ"מ, ואורכי צלעות המלבן ואלכסונו – מהווים שלשה פיתגורית (למה השלשה יסודית ?).



מצא את אורכי צלעותיו של המלבן.

ניתן להקל על התמודדות עם פתרון המשימה על-ידי מתן (לא חייבים) שני רמזים בהדרגה.

רמז א':

בכל שלשה פיתגורית יסודית – אחד ממספרי השלשה מתחלק ב-3, ואחד תמיד מתחלק ב-5 (יש לזכור, שלפעמים זה אותו מספר (לדוגמה בשלשה (28, 45, 53)).

רמז ב׳:

אם עדיין לא נמצא הפתרון, נבקש לקבוע את רדיוס המעגל ולהיעזר בנתון: $AE =$ 25 מ״מ.

ב. נבחר שני מספרים חד-ספרתיים. נעלה כל אחד מהם בריבוע, ואת התוצאות נצמיד למספר אחד. ידוע, שקיבלנו מספר 4 ספרתי, שהוא ריבוע של מספר טבעי. מצא את זוג המספרים (a, b), ההולמים את הדרישה.

פתרון בדרך א׳ – ניסוי וטעייה

היות ומדובר במספרים חד-ספרתיים, שלאחר העלאתם בריבוע והצמדתם זה לזה – מתקבל מספר ארבע-ספרתי, הרי כל אחד מהמספרים a ו-b חייב לקבל $a, b \geq 4$, כדי לקבל מספר דו-ספרתי לאחר העלאה בריבוע. למעשה, מה שנדרש הוא $\overline{a^2b^2} = n^2$, כאשר n מספר טבעי.

היות ו-$4 \leq a, b \leq 9$ הרי $16 \leq a^2, b^2 \leq 81$, ולכן האפשרויות ל-a^2 ו-b^2 הן הבאות: $a^2, b^2 = 16, \quad 25, \quad 36, \quad 49, \quad 64, \quad 81$.

מספר האפשרויות להצמיד זוג של מספרים אלה הוא $A_6^2 + 6 = 30 + 6 = 36$, כאשר A_6^2 הוא מספר האפשרויות להצמיד שני מספרים שונים, כגון 1636, או להפך 3616. המספר 6 הוא מספר האפשרויות להצמיד שני מספרים זהים, כגון 3636.[1] למעשה, יש לבנות את כל 36 המספרים השונים, להוציא לכל אחד מהם את השורש הריבועי ולמצוא את המספר או המספרים, שהשורש שלהם הוא מספר טבעי.

בניסוי וטעייה מתקבל המספר $1681 = 41^2$, כלומר $a = 4$ ו-$b = 9$, והשלשה הפיתגורית היא $(40, \quad 9, \quad 41)$.

1. האם ייתכן מצב, ש-$a = b$, כלומר $\overline{a^2a^2} = n^2$? נניח מצב, ש-$a^2 = \overline{cd}$ הוא מספר דו-ספרתי, המתקבל מהעלאה של a בריבוע. עם ההצמדה – מתקבל מספר ארבע-ספרתי $\overline{cdcd}$. ערכו של מספר זה הוא $1000c + 100d + 10c + d = 101 \cdot (10c + d)$. מספר זה מורכב ממכפלה של שני מספרים: הראשון 101 הוא מספר ראשוני, ועל-כן הוא בלתי-פריק, ואילו המספר השני $10c + d$ קטן מ-100. לכן אי-אפשר, שמכפלתם תהיה ריבוע של מספר טבעי.

פתרון בדרך ב' – אלגברית

פעולת הצמדת ריבועי המספרים שנבחרו – פירושה: הזזת המספר a^2 בשתי ספרות (לספרת המאות והאלפים). הזזה זו שקולה להכפלת a^2 ב-100, המשוואה היא $(10a)^2+b^2=n^2$.

לכן $(b,10a,n)$ מהווה שלשה פיתגורית.

מכאן: $0<b^2=n^2-(10a)^2=(n+10a)\cdot(n-10a)<100$.

כלומר, אנו מחפשים זוג מספרים טבעיים, שמכפלת סכומם בהפרֵשָׁם קטנה מ-100 וגדולה מ-0.

אם $n-10a=1$, אז $n+10a<100$ ומקבלים $a<4.95$, אך היות ו- $a\geq 4$, לכן התשובה היא $a=4$.

מכאן: $0<b^2=n^2-1600<100$ **או** $1600<n^2<1700$. המספר היחיד, ההולם את הדרישה הזאת, הוא $n=41$, דהיינו אנו מקבלים $b=9$, ואכן $\overline{1681}=41^2$.

עבור $n-10a=2,\quad 3,\quad 4...$ מקבלים $a<4$. דבר זה הוא בלתי-אפשרי.

משימה דומה (ללא פתרון)

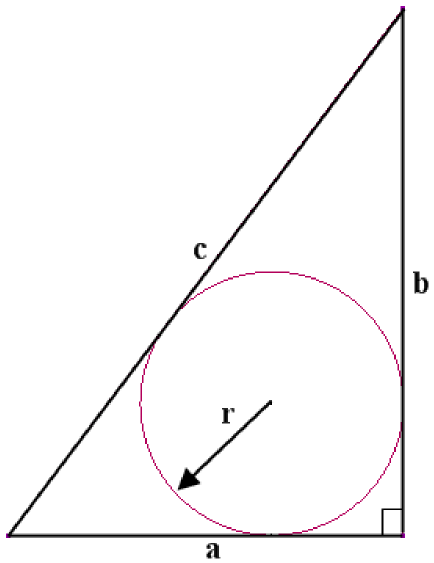
נבחר שני מספרים חד-ספרתיים, ונעלה אותם בריבוע. ערכי הריבועים שלהם – מספר דו-ספרתי ומספר חד-ספרתי. נהפוך את סדר הספרות במספר הדו-ספרתי, ונצמיד לו את הריבוע השני. מתקבל מספר תלת-ספרתי, שהוא ריבוע של מספר טבעי. מה הם המספרים, ומה הקשר לשלשה פיתגורית?

ג. הוכיחו, שערך הרדיוס על המעגל החסום במשולש ישר-זווית יהיה מספר שלם, אם צלעותיו של המשולש מהוות שלשה פיתגורית.

הוכחה:

ידועה הנוסחה לחישוב הרדיוס של המעגל החסום במשולש כלשהו (אם הנוסחה אינה מוכרת, נוכל להוכיח אותה בקלות).

$r=\frac{S_\Delta}{p}$, כאשר S_Δ הוא שטח המשולש,



ו- p מחצית היקף המשולש.

מכאן, $$r=\frac{\frac{a\cdot b}{2}}{\frac{a+b+c}{2}}=\frac{2\cdot a\cdot b}{2\cdot(a+b+c)}$$

את ערך הביטוי $2\cdot a\cdot b$ ניתן לרשום כ- $(a+b)^2-(a^2+b^2)$. כאשר נשתמש במשפט פיתגורס $a^2+b^2=c^2$, נקבל,

$$2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2)=(a+b)^2-c^2=(a+b+c)\cdot(a+b-c)$$

הצבת הקשר בנוסחת הרדיוס נותנת $r=\dfrac{a+b-c}{2}$

אם כל מרכיבי השלשה (a,b,c) זוגיים (שלשת תולדה), הרי הביטוי $a+b-c$ יהיה זוגי ו- r יהיה מספר שלם. אם השלשה (a,b,c) יסודית, רק a או b זוגיים, ואילו c אי-זוגי כפי שהוכח. גם במקרה זה הביטוי $a+b-c$ יהיה זוגי, ו- r יהיה מספר שלם.

מ.ש.ל.

עוד על שלשות פיתגוריות – ניתן למצוא במאמר שפירסם עות׳מאן (2005) בחוברת של כתב-העת על״ה.

ביבליוגרפיה

מיטב, א׳ (2004). *מתמטיקה ארבע יחידות*. גבעת שמואל: שורש.

מכללה ירושלים (2010). חידות. *אלף אפס*. אוחזר ב-13 במרץ, 2010, מתוך http://alefefes.macam.ac.il/

משפט פיתגורס (2010). *ויקיפדיה: האנציקלופדיה החופשית*. אוחזר ב-13 במרץ, 2010, מתוך http://he.wikipedia.org/wiki/%D7%9E%D7%A9%D7%A4%D7%98_%D7%A4%D7%99%D7%AA%D7%92%D7%95%D7%A8%D7%A1

עות׳מאן, ע׳ (2005). שברי יחידה, שלשות פיתגוריות ומספר המחלקים של מספרים טבעיים. *על״ה, 34*, עמ׳ 21-24.