דוד פרייברט, משה סטופל, שלמה חריר

המעגל – כאמצעי-עזר להורדת אנך לישר כלשהו בעזרת סרגל בלבד

תקציר

בניית אנך לישר נתון, שיעבור דרך נקודה כלשהי, בעזרת סרגל ומחוגה – פשוטה ביותר, והיא שייכת לקבוצת-הבניות ההנדסיות היסודיות.

כשמוסיפים את המגבלה של שימוש בסרגל בלבד, הרי דרגת-הקושי של המשימה עולה משמעותית.

במקרה זה ניתן לבצע את הבנייה רק בתנאי שברקע נתון מעגל שמרכזו מצוין. שלבי-הבנייה מבוססים על יישום תכונות של צורות גאומטריות מוכרות, וכן – תכונות פרויקטיביות.

במאמר ציינו את התכונות הדרושות – כולל ההגדרה של קדקודון ארבעתי והחלוקה ההרמונית שנוצרת בו.

הוצג פתרון המשימה לשלושת המקרים הבאים:

א. הישר חותך את המעגל בשתי נקודות.

ב. הישר משיק למעגל.

ג. הישר והמעגל זרים זה לזה.

הקדמה

יכולת-שרטוט נכונה ומדויקת של צורות הנדסיות פשוטות, על פי נתונים מסוימים, היא כלי בסיסי וחיוני של המורים למתמטיקה, וכן – של בעלי מקצוע נוספים בענפים, כגון: עיצוב, נגרות ובמגוון תחומי ההנדסה והתכנון. לעתים קרובות, גם בחיי יום-יום, הרי לצורך הסבר, המחשת רעיון או תכנון כלשהו – מכינים איור, שרטוט, תרשים וכד׳. חשוב מאוד, שבמקרים אלו – ההמחשה בעזרת האיור תהיה נכונה ומדויקת.

ענף הבניות ההנדסיות הוא בעל חשיבות רבה במכלול לימודי הנדסת המישור. הבניות ההנדסיות הן שדה רחב, המחייב יישום תכונות גאומטריות ומשפטים – עיסוק, המאפשר תרגול והטמעה של חומר נלמד.

תארנים: *בניות הנדסיות; משפטים בגאומטריה.*

מילות-מפתח: *בניות הנדסיות ייחודיות; יישום משפטים בגאומטריה; בניות בעזרת סרגל בלבד.*

במקרים רבים לשם מציאת הדרך הנכונה לביצוע הבנייה – נדרשת חשיבה עמוקה ורב-כיוונית, יצירתיות, שילוב בניות-עזר ויכולת-הוכחה של נכונות-הבנייה, שבפני עצמם מהווים **אתגר רב-עוצמה.** ההתמודדות אתו מפלסת דרך להתמודדות עם אתגרים נוספים במתמטיקה ובתחומים אחרים.

הייחוד של משימת הבנייה שתוצג בהמשך הוא השימוש בסרגל בלבד.

כאן המקום לציין, שהמתמטיקאי הדגול, יעקב שטיינר (*1796-1863*) (Jakob Steiner, 2009a, 2009b, 2009c), אשר תרומתו להנדסת-המישור ולגאומטריה התיאורית (פרויקטיבית) הייתה גדולה, הוכיח שכל בעיית-בנייה, הניתנת לפתרון על-ידי סרגל ומחוגה, ניתנת לפתרון על-ידי סרגל בלבד, בתנאי שנתון מעגל, אשר מסומן בו קוטר, ובמקרים מסוימים – גם בציון מרכז המעגל (סטופל ואוקסמן, 1996א, 1996ב)

פתרון משימות-בנייה באמצעות בעזרת סרגל בלבד – מחייב ידע רחב ומעמיק יותר בהנדסת-המישור (אוקלידית או פרויקטיבית) – בהשוואה לידע, הנדרש לפתרון בעיות בנייה על-ידי מחוגה וסרגל.

סוג זה של בניות מאפשר ליישם את התכונות החשובות של צורות גאומטריות מוּכָּרות במישור האוקלידי או הפרויקטיבי, לשם פתרון בעיות ייחודיות, ובכך נוכל לגוון את תהליך-הלימוד של הגאומטריה.

ההדגמה של יישום הידע – תוך שימוש באנליזה חשיבתית – תיעשה באמצעות בניית-אנך לישר נתון, באופן שיעבור דרך נקודה נתונה, כשברקע נתון מעגל ככלי-עזר.

תיאור המשימה

בנו אנך לישר, **שאינו עובר דרך המרכז של מעגל נתון**, על-ידי שימוש בסרגל בלבד.

משימה זו היא המשך למשימה הפשוטה יותר, אשר בה עובר הישר דרך מרכז-המעגל, והיא הוצגה במאמר קודם (פרייברט, סטופל וחריר, 2008).

הפתרון של המשימה דורש ידע בסיסי בהנדסת-מישור, כולל הכרת התכונות המיוחדות של טרפז, וכן – תכונות פרויקטיביות (תיאוריות), כגון: חלוקה הרמונית של זוגות-נקודות בשילוב עם המוקד והמדריך שלה.

הצגת המשימה

במישור מסומן מעגל עם מרכזו O, ישר ℓ, שאינו עובר דרך O, וכן נקודה אקראית P.

בנו באמצעות סרגל בלבד – את האנך לישר ℓ, העובר דרך הנקודה P.

ביחס למעגל הנתון, שבהמשך יצוין כמעגל O, קיימים שלושה מצבים הדדיים עם הישר ℓ:

א. חותך ב. משיק ג. זרים.

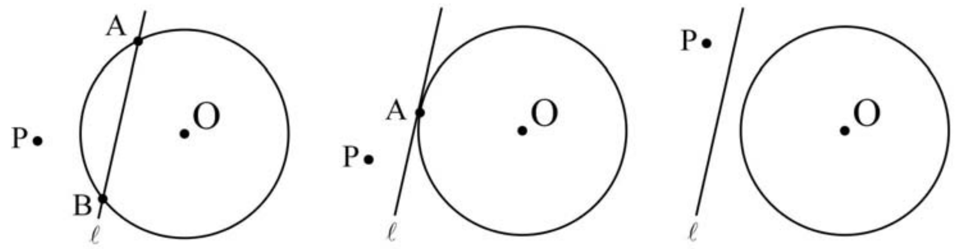
לכן פתרון המשימה מורכב מהפתרונות של המקרים הבאים:

א. הישר ℓ חותך את המעגל O בנקודות A וְ-B.

ב. הישר ℓ משיק למעגל O בנקודה A.

ג. אין נקודות משותפות לישר ולמעגל.

שלושת המקרים מתוארים באיור 1.

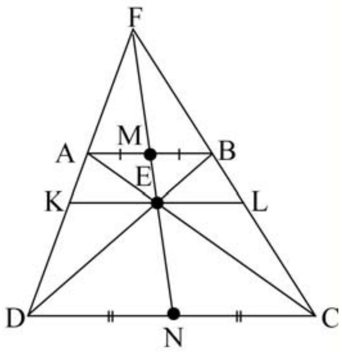


איור 1 א'   איור 1 ב'   איור 1 ג'

התכונות ההנדסיות והפרויקטיביות, הרלוונטיות לפתרון המשימה

הערות מקדימות

1. היות ומשימה זו מיועדת לסטודנטים, שלמדו את הקורס "הנדסה תיאורית" (גאומטריה פרויקטיבית), והם בעלי-ידע בתחום וכן בעלי-שליטה ומיומנות בהתמודדות עם משימות בהנדסת-מישור, לפחות ברמה הנדרשת מתלמיד בחינוך העל-יסודי, הרי התכונות הפרויקטיביות שיוצגו כאן – נדרשות לפתרון-המשימה בלבד.
2. את הפתרון של מקרים א' ו-ב' של משימה – ניתן להציג על סמך תכונות הטרפז – ללא השימוש במושג: חלוקה הרמונית של זוגות נקודות. על-כן ניתן להציג אותו לתלמידי תיכון, המכירים את התכונות המתאימות בטרפז, ובמיוחד – את התכונה המכונה "**משפט שטיינר**":



איור 2

תכונה א' – משפט שטיינר

בכל טרפז $ABCD$ ארבע הנקודות: שתי נקודות האמצע של הבסיסים, נקודת חיתוך האלכסונים ונקודת החיתוך של המשכי השוקיים, נמצאות כולן על קו ישר – כפי שנראה באיור 2 $(DN = NC, AM = MB)$. הנקודות: F, M, E וְ-N מונחות על אותו ישר.

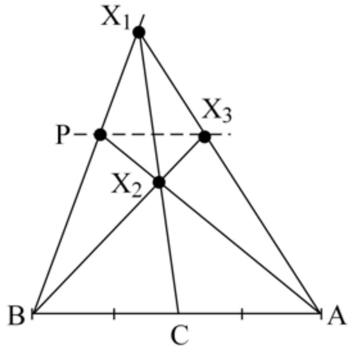
בניית יישום, המבוססת על משפט שטיינר

דרך נקודה כלשהי – בנו קו מקביל לקטע נתון, שגם נקודת-האמצע שלו נתונה [הוכחת הבנייה מופיעה במקור (סטופל ואוקסמן, 1996א)].

נתונים נקודה P וקטע AB יחד עם נקודת האמצע שלו C.

בנו את הישר, העובר דרך הנקודה P ומקביל ל-AB.

תיאור הבנייה



איור 3

נחבר בישר את הנקודות B וְ-P, ועל המשך הישר נבחר נקודה כלשהי X_1. נחבר בישרים את הנקודה X_1 עם הנקודות A וְ-C (איור 3).

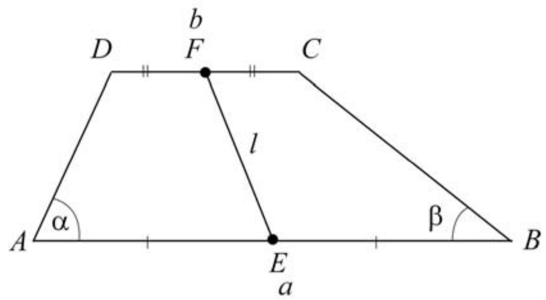
נחבר בישר את הנקודה A עם הנקודה P, ואז תתקבל נקודת-החיתוך X_2. כשנחבר בישר את הנקודה B עם הנקודה X_2, המשך הישר יחתוך את הישר AX_1 בנקודה X_3. הישר PX_3 הוא הישר המבוקש.

בנייה זו מציגה שיטה כללית של בניית ישר, המקביל לישר הנתון (עם נקודת-האמצע שלו).

יישום משפט שטיינר לפתרון בעיה גאומטרית

כהקדמה להצגת המשימה המרכזית של המאמר – נציג בעיה גאומטרית, שהפתרון הפשוט שלה יינתן על-ידי שימוש במשפט שטיינר. נוסף לו נציג פתרון, המתבסס על יישום נוסחה אלגברית בשילוב עם משפט פיתגורס, וכן – פתרון הנדסי חלופי ללא שימוש במשפט שטיינר.

הצגת הבעיה



איור 4

נתון טרפז, שאורך בסיסיו a ו-b, וסכום זוויות בסיסו התחתון 90^0. בטאו באמצעות a ו-b את אורך קטע האמצעים של הבסיסים (איור 4).

נתון:

$AB=a$

$DC=b$

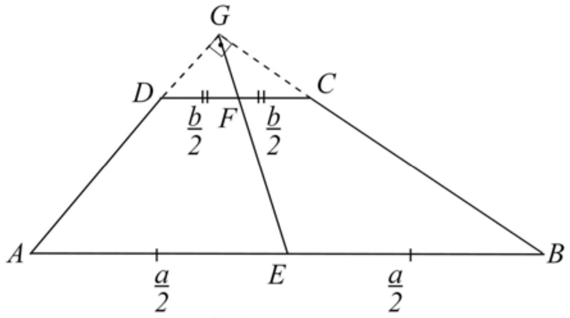
$\alpha+\beta=90^0$

$AE=EB,\ DF=FC$

בטאו את אורך קטע האמצעים של הבסיס l באמצעות a ו-b.

א. פתרון הבעיה על-ידי שימוש במשפט שטיינר

כשנמשיך את השוקיים עד לנקודת-פגישתן, נקבל משולש ישר-זווית ΔGAB (איור 5).



איור 5

לפי משפט שטיינר, הנקודות G, F ו-E נמצאות על ישר אחד.

GF – תיכון במשולש ישר-זווית, ולכן הוא שווה למחצית היתר:

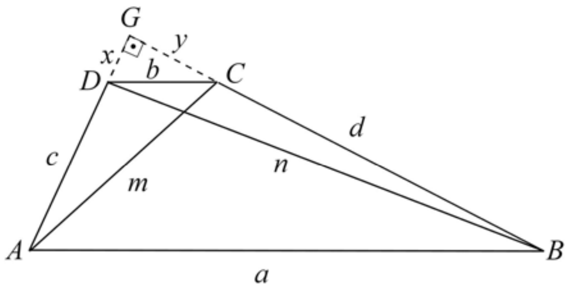
$$GF = \frac{1}{2}DC = \frac{b}{2}$$

GE – תיכון ליתר במשולש ישר-זווית, ולכן הוא שווה למחצית היתר: $GE = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$

מכאן: $FE = GE - GF = \frac{a-b}{2}$

ב. פתרון הבעיה על-ידי שימוש בנוסחה אלגברית ובמשפט פיתגורס

חשוב לדעת (לפחות, למורי-המתמטיקה), שקיימת מערכת של נוסחאות אלגבריות, הקושרות צלעות, אלכסונים וקטעים בטרפז אקראי (פרייברט, 2006). אחת מהנוסחאות היא,



איור 6

$m^2 + n^2 = 2(f^2 + b^2)$ (*), כאשר m ו-n הם אלכסוני הטרפז, f הוא אורך קטע האמצעים של השוקיים ו-l הוא אורך קטע האמצעים של בסיסי הטרפז שיש להביעו. נמשיך את שוקי הטרפז עד לנקודת החיתוך שלהן G.

לפי הנתון $(\alpha + \beta = 90^0)$, המשולש ΔAGB הוא ישר-זווית (איור 6).

נסמן את שוקי הטרפז ב-c ו-d, ואת המשכיהן – בהתאמה ב-x ו-y.

$m^2 = (c+x)^2 + y^2$ (משפט פיתגורס במשולש ΔACG)

$n^2 = (d+y)^2 + x^2$ (משפט פיתגורס במשולש ΔBDG)

על-ידי חיבור המשוואות נקבל את הקשר:

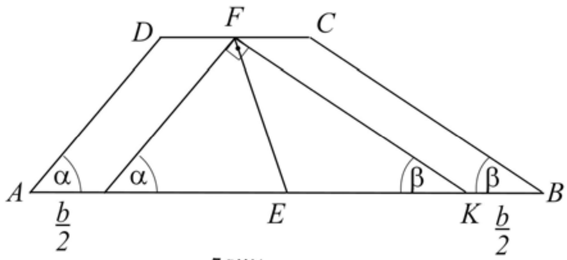
$$(*)\ m^2+n^2=\underbrace{(c+x)^2+(d+y)^2}_{a^2}+\underbrace{x^2+y^2}_{b^2}=a^2+b^2$$

כלומר, בטרפז הספציפי הנתון סכום ריבועי האלכסונים שווה לסכום ריבוי אורכי הבסיסים.

נציב קשר זה יחד עם הקשר שבין אורך קטע האמצעים של שוקי הטרפז ואורכי בסיסיו, $f=\frac{a+b}{2}$, בנוסחה (*), ואז נקבל את הנוסחה:

$$m^2+n^2=a^2+b^2=2(f^2+l^2)=2\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+l^2\right)\Rightarrow l=\frac{a-b}{2}$$

ג. פתרון חלופי – פתרון הנדסי ללא שימוש במשפט שטיינר

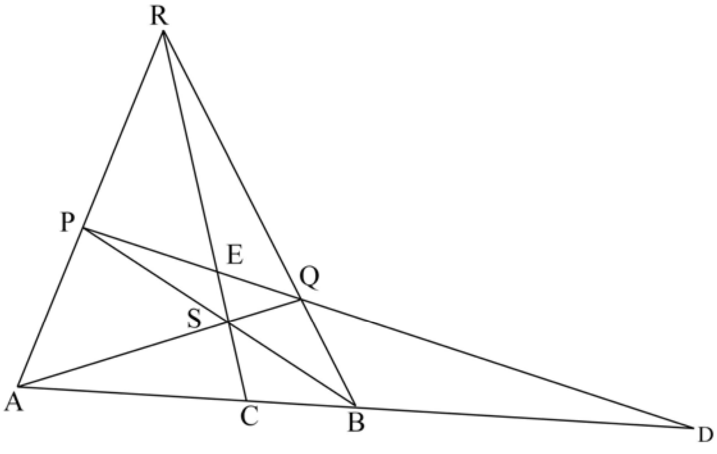


איור 7

מהנקודה F נעביר קווים מקבילים לשוקי הטרפז, החותכים את בסיסו התחתון בנקודה L ו-K, כפי שנראה באיור 7.

כך נוצרו שתי מקביליות: $AKFD$ ו-$LBCF$. המשולש ΔKFL הוא משולש ישר-זווית, שאורך יתרו הוא $KL=a-b$. היות ו-FE הוא תיכון ליתר במשולש ישר-זווית ΔKFL, הרי אורכו הוא $FE=\frac{a-b}{2}$.

פתרון על-ידי שימוש בגאומטריה ניתן למצוא במקור (מוגילבסקי וסטופל, 2005).



איור 8

תכונה ב' – חלוקה הרמונית של זוגות נקודות

נתון קדקודון ארבעתי $PQRS$ (הגדרות הצורה והגדרות נוספות מובאות בנספח), אשר בו נקודות אלכסוניות A, B ו-E, כפי שנראה באיור 8. הנקודות C

ו-D הן נקודות-החיתוך של הישר AB עם המשכי-הצלעות RS ו-PQ בהתאמה. הנקודה האלכסונית השלישית E היא נקודת החיתוך של הצלעות RS ו-PQ.

אפשר להוכיח, כי הנקודות C ו-D מחלקות את הקטע AB חלוקה הרמונית.

(ההוכחה של תכונה זו מופיעה בנספח למאמר).

הערות:

1. על-פי ההגדרה של חלוקה הרמונית ניתן לרשום את התכונה האחרונה באופן הבא:

$$\frac{AD}{BD}=\frac{AB}{BC} \quad \text{או} \quad \frac{AC}{BC}\times\frac{BD}{AD}=1$$

2. כאשר נקודה D הולכת ומתרחקת (על הישר AB) מנקודה B עד אינסוף, אז היחס $\frac{BD}{AD}$

שואף ל-1, ומהקשר ההרמוני נובע, ש-$\frac{AC}{BC}\to 1$, זאת אומרת, שנקודה C מתקרבת לאמצע הקטע AB. המסקנה היא, שכאשר הנקודה D מתרחקת מהנקודה A לאינסוף,

אז $AC \parallel PQ$ והנקודה C מתקבלת באמצע AB.

3. על סמך המסקנה הנ"ל מתבסס פתרון המשימה הבאה:

משימת-עזר

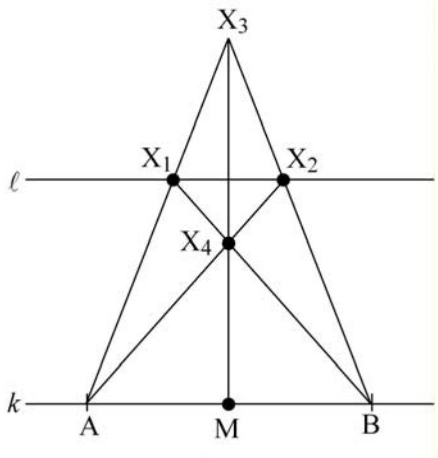
נתונים שני ישרים מקבילים: ℓ ו-k וקטע AB על ישר k. מצאו על-ידי בנייה בעזרת סרגל בלבד – את נקודת-האמצע של הקטע AB.

תיאור הבנייה

נסמן שתי נקודות כלשהן X_1 ו-X_2 על הישר ℓ.

נחבר את הנקודה A עם הנקודה X_1 ואת הנקודה B עם הנקודה X_2. המשכי הישרים נחתכים בנקודה X_3.

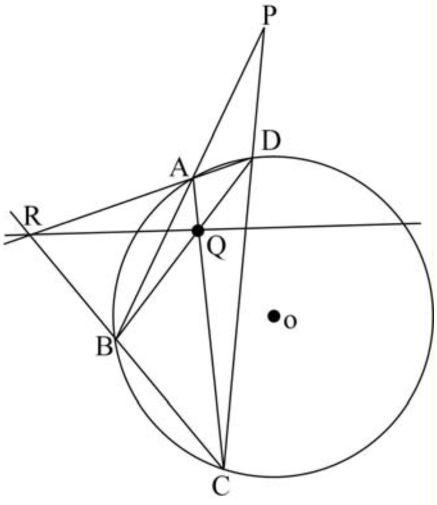
נעביר את אלכסוני הטרפז AX_1X_2B, הנחתכים בנקודה X_4. המשך הישר X_3X_4 חותך את הקטע AB בנקודה M, שהיא נקודת-האמצע שלו (איור 9).



איור 9

תכונה ג' – תכונה של מוקד ומדריך בקשר למרובע חסום במעגל, שצלעותיו הנגדיות אינן מקבילות

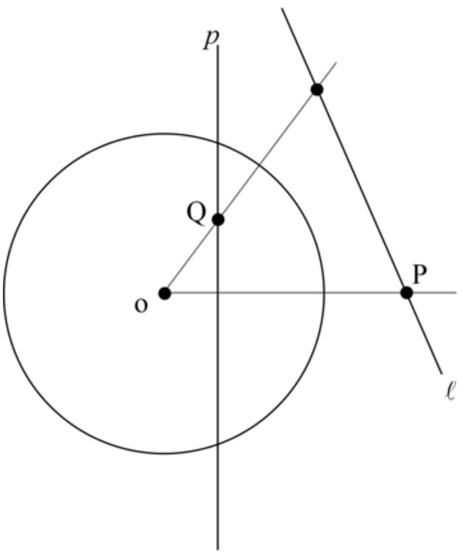
אם מרובע $ABCD$, שצלעותיו הנגדיות אינן מקבילות, חסום במעגל אז בקדקודון הארבעתי $ABCD$, שמצויות בו הנקודות: R, Q, P שהן נקודות אלכסוניות – תקף הכלל: הישר הוא מדריך של המוקד P, והישר RP הוא המדריך של המוקד Q, כפי שנראה באיור 10.



איור 10

תכונה ד' – תכונת ההדדיות שבין שני זוגות של מוקד ומדריך

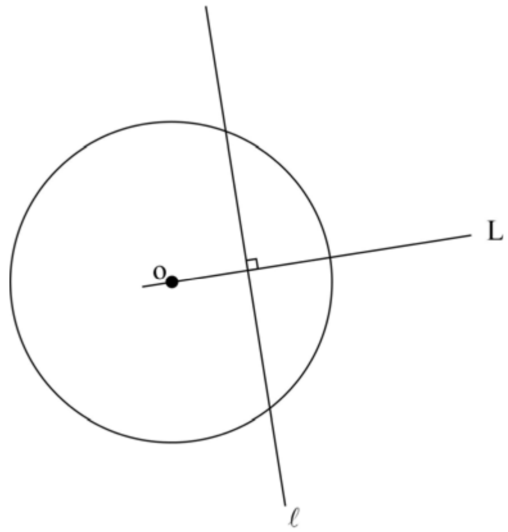
אם נקודה P שייכת למדריך q של המוקד Q , אז גם הנקודה Q שייכת למדריך p של המוקד P, (ההדדיות נראית באיור 11).



איור 11

תכונה ה׳ – המצב ההדדי בין המדריך לבין הישר, המחבר את המוקד עם מרכז המעגל

המדריך l של מוקד L והישר OL (O- מרכז המעגל) מאונכים זה לזה (איור 12).



איור 12

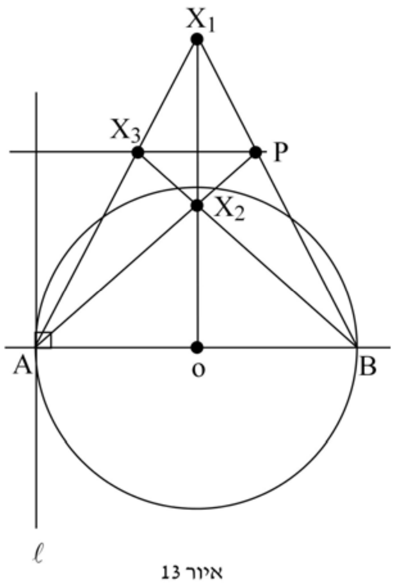
פתרון המשימה

משימה ב׳ (איור 1ב׳)

משימה זו, אשר בה הישר ℓ משיק למעגל O, היא הפשוטה ביותר.

תיאור הבנייה

אם נחבר את נקודת ההשקה A עם מרכז המעגל O והמשך הישר יחתוך את המעגל בנקודה B, AB – אז הקוטר הוא קטע, שנקודת-האמצע שלו הוא המרכז O (איור 13). כפי שתיארנו בבניית היישום של תכונה א׳, נבנה דרך הנקודה P ישר PX_3 , המקביל לקוטר AB, ועל-כן הוא מאונך לישר ℓ .



איור 13

משימה א' (איור 1א')

במשימה זו הישר ℓ חותך את המעגל בשתי נקודות: A ו-B, וכן נתון, ש- O הוא מרכז המעגל.

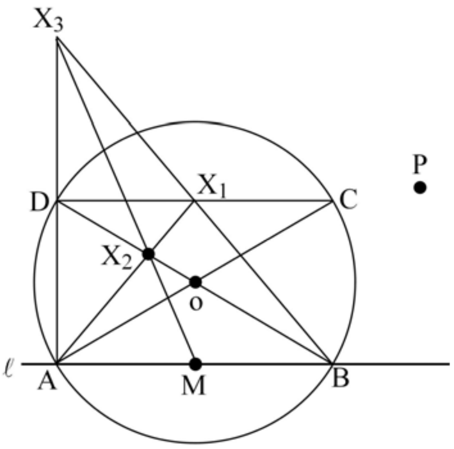
תיאור הבנייה

כדי להימנע מקבלת איור סופי מסורבל בעל מספר רב של נקודות וקווים, תתואר הבנייה במספר שלבים.

שלב א'

נחבר את מרכז המעגל O עם הנקודה A ועם הנקודה B. המשכי-הישרים חותכים את המעגל בנקודות C ו-D בהתאמה (איור 14). ההוכחה, שהמרובע $ABCD$ הוא מלבן, נותרת לקורא.

בוחרים נקודה כלשהי X_1 על הקטע CD. המרובע ABX_1D הוא טרפז ישר-זווית. נעביר את אלכסונו AX_1, הנחתך בנקודה X_2 עם האלכסון BD, וכן נבנה את המשכי שוקיו, שנפגשות בנקודה X_3.

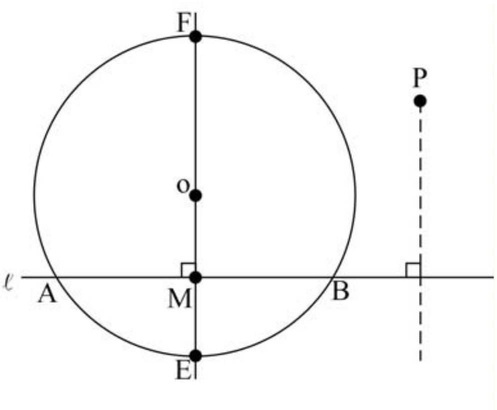


איור 14

אם נחבר בישר את הנקודות X_2 וְ- X_3, הרי המשך-הישר יחתוך את הקטע AB בנקודה M, שהיא אמצע הקטע, וזאת – לפי תכונה א' (משפט שטיינר).

שלב ב'

אם נחבר בישר את הנקודות M וְ-O, הרי המשכי-הישר חותכים את המעגל בנקודות E וְ-F. הקטע EF הוא קוטר במעגל (לפי תכונת קוטר המאונך למיתר), כשאמצע הקטע הוא מרכז המעגל (איור 15). כמו במשימה 1ב' נבנה דרך הנקודה P ישר מקביל לקוטר EF – בהתאם לבניית היישום של תכונה א', ועל כן הוא מאונך לישר ℓ.



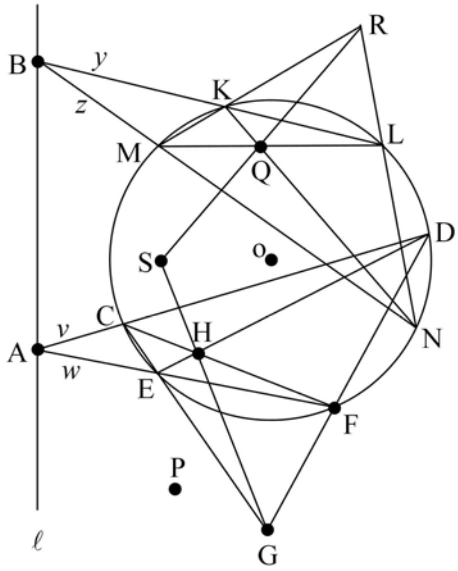
איור 15

משימה ג׳ (איור 1ג׳)

במשימה זו הישר ℓ זר למעגל שמרכזו O, ועל-כן הוא אינו חותך אותו בשום נקודה.

תיאור הבנייה

גם במקרה זה נתאר את הבנייה במספר שלבים בעזרת איורים עוקבים.

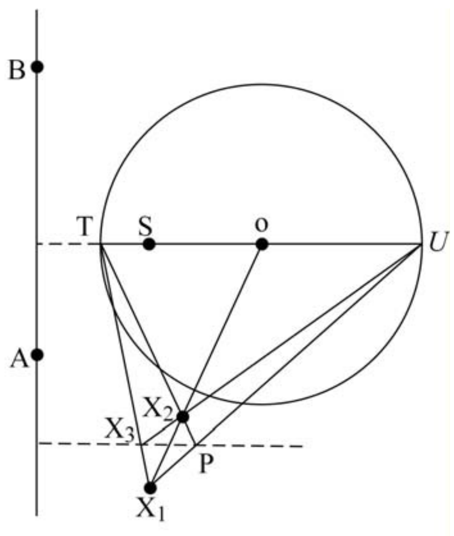


איור 16

שלב א׳

נבחר שתי נקודות כלשהן: A וְ-B על הישר ℓ. מהנקודה A נעביר שני חותכים למעגל v וְ-w, החותכים אותו בנקודות C, D, E וְ-F בהתאמה (איור 16). נסמן ב-G את נקודת-החיתוך של הישרים CE וְ-FD. נסמן ב-H את נקודת-החיתוך של הישרים CF וְ-DE. נחזור על הפעולה בהעברת שני חותכים y וְ-z, היוצאים מהנקודה B וחותכים את המעגל בנקודות M, L, K וְ-N בהתאמה. נסמן ב-R את נקודת-החיתוך של הישרים: MK וְ-NL. נסמן ב-Q את נקודת החיתוך של הישרים KN וְ-LM. נסמן ב-S את נקודת- החיתוך של הישרים GH וְ-RQ.

שלב ב׳



איור 17

נסמן באותיות T וְ-U את נקודות- החיתוך של המשכי- הישר OS עם קשת-המעגל. נסמן נקודה כלשהי X_1 על המשך UP. נסמן ב-X_2 את נקודת-החיתוך של הישר TP עם הישר OX_1. נסמן ב-X_3 את נקודת-החיתוך של הישרים TX_1 וְ-UX_2.

הישר PX_3 הוא הישר הנדרש, כלומר, $PX_3 \perp \ell$ (איור 17).

הוכחת הבנייה

השלב הראשון כלל את בניית המדריך GH של המוקד A ובניית המדריך RQ של המוקד B, וזאת – על-פי תכונה ג׳. על-פי תכונה ד׳, הרי מצד אחד,

המדריך של נקודה S, השייכת למדריך GH של המוקד A, עובר דרך הנקודה A. מצד שני, הנקודה S שייכת גם למדריך RQ של המוקד B. לכן המדריך של הנקודה S עובר דרך נקודה B וגם דרך שתי הנקודות A וְ-B, ועל-כן הוא הישר ℓ .

על-פי תכונה ה', הישר OC, העובר דרך המוקד S והמרכז O מאונך למדריך ℓ (כלומר, $OS \perp \ell$). מכיוון שהקטע TU הוא קוטר של המעגל O, אז הנקודה O היא האמצע שלו. על פי יישום הבנייה של תכונה א', נבנה ישר PX_3 , שהוא מקביל ל-OS, ולכן הוא ישר מאונך ל- ℓ .

מ.ש.ל.

סיכום

תחום הבניות ההנדסיות מרהיב ביופיו ומשמש כלי ליישום-ידע, משפטים ותכונות של צורות בהנדסת-המישור ובהנדסה התיאורית, וכן – כאתגר חשיבתי.

ענף חשוב בתחום הוא בניות, שבהן קיימות מגבלות על סוג הכלים, שמותר להשתמש בהם לשרטוט, כגון: בניות על-ידי סרגל (חסר שנתות) בלבד (לא ניתן להשתמש במחוגה) או על-ידי מחוגה בלבד (חריר, סטופל וריגלמן, 2006) (לא ניתן להשתמש בכל סרגל). על אף המגבלות של שימוש בכלי-שרטוט מסוימים – ניתן להתמודד בהצלחה עם משימות מגוונות.

במאמר זה הצגנו משימה של הורדת אנך לישר, באופן שיעבור דרך נקודה נתונה, כשברקע נתון מעגל בסימון מרכזו או בלעדיו, כאשר הישר הנתון חותך את המעגל בשתי נקודות, או משיק לו, או זר לו.

להבנת הרקע המתמטי הבאנו כרקע וכבסיס את התכונות היסודיות, הדרושות לביצוע המשימות.

למתעניינים בתחום ובעיקר לשוחרי לשוחרי-המתמטיקה וחובביה – אנו מציעים לעיין במקורות הבאים: Coxeter, 1974; Hadamard, 2005; Samogorghuriskii, 1961; Samuel, 1988.

ביבליוגרפיה

חריר, ש', סטופל, מ' וריגלמן, ו' (2006). בניות הנדסיות שונות. ***שאנן, יא***, 247-260.

מוגילבסקי, ר' וסטופל, מ' (2005). משפטים שנשכחו בהנדסת מישור והדגמת השימוש בהם לפתרון בעיות. ***שאנן, י***, 231-252.

סטופל, מ' ואוקסמן, ו' (1996א). בניות גיאומטריות על-ידי סרגל בלבד. ***על"ה, 18***, 41-46.

סטופל, מ' ואוקסמן, ו' (1996ב). בניות הנדסיות ככלי לפיתוח החשיבה והיצירתיות. ***שאנן, ב***, 95-108.

פרייברט, ד' (2006). אלגברה של טרפז אקראי: מערכת נוסחאות ויישומה להתרת בעיות גיאומטריות בדרך אלגברית. ***תלפיות, יג-יד***, 339-350.

פרייברט, ד', סטופל, מ' וחריר, ש' (2008). בידנו סרגל בלבד, כיצד נבנה אנך לישר?, ***על"ה, 39***, 27-33.

Coxeter, H. S. M. (1974). ***Projective Geometry*** (2nd ed.). Toronto: University of Toronto Press.

Hadamard, J. (2005). ***Lecons de geometrie elementaire***. Ann Arbor, Michigan: University of Michigan Library.

Jakob Steiner (2009a). ***Encyclopedia Britannica***. Retrieved February 16, 2009, from http://www.britannica.com/EBchecked/topic/565009/Jakob-Steiner#tab=active~checked%2Citems~checked&title=Jakob%20Steiner%20--%20Britannica%20Online%20Encyclopedia

Jakob Steiner (2009b). ***encyclopedia.com***. Retrieved February 16, 2009, from www.encyclopedia.com/doc/1E1-SteinerJ.html

Jakob Steiner (2009c). ***Wikipedia: the free encyclopedia***. Retrieved February 16, 2009, from http://en.wikipedia.org/wiki/Jakob_Steiner

Samogorghuriskii, A. S. (1961). ***The Ruler in Geometrical Constructions*****.** Oxford: Pergamon Press.

Samuel, P. (1988). ***Projective Geometry*****.** New York: Spring-Verlag.

נספח

א' – הגדרות של חלוקת קטע

I – חלוקה פנימית

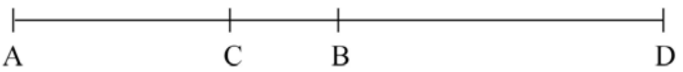
אם נקודה C, הנמצאת על הקטע AB (בין A ל-B), מחלקת אותו לשני קטעים באופן ש- $\frac{m}{n}=\frac{AC}{CB}$ ($\frac{m}{n}$ – יחס נתון), אז C מחלקת את הקטע AB חלוקה פנימית ביחס של $\frac{m}{n}$.

II- חלוקה חיצונית

אם נקודה D, הנמצאת על המשך AB, מקיימת $\frac{AD}{DB}=\frac{m}{n}$, אז D מחלקת את הקטע חלוקה חיצונית ביחס של $\frac{m}{n}$.

III- חלוקה הרמונית

אם נקודה C מחלקת את AB חלוקה פנימית ביחס $\frac{m}{n}$, ונקודה D מחלקת את הקטע חלוקה חיצונית באותו יחס, אז הנקודות C וְ-D מחלקות את AB חלוקה הרמונית ביחס $\frac{m}{n}$ (איור 18).

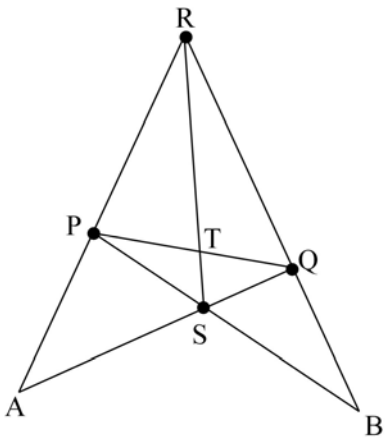


איור 18

ב' – הגדרה של קדקודון ארבעתי

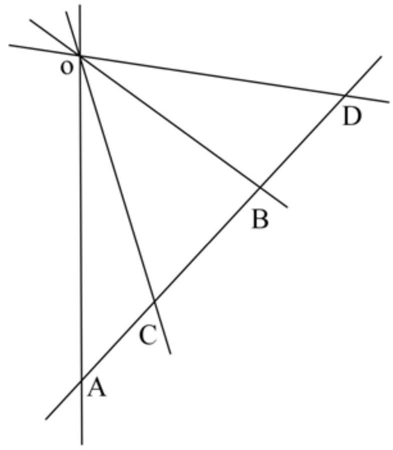
קדקודון ארבעתי הוא צורה, המורכבת מ-4 נקודות על מישור, שכל 3 מהן אינן מונחות על ישר אחד, וכן משׁשת הישרים, המחברים כל זוג מארבע הנקודות. ארבע הנקודות נקראות קדקודים, וששת הישרים המחברים אותן נקראים צלעות.

P, Q, R וְ-S הם הקדקודים, ואילו הישרים הם: QR, RS, PR, PS, PQ וְ-QR כפי שנראה באיור 19. צלעות הקדקודון הארבעתי, שאין להן קדקוד משותף, נקראות צלעות נגדיות (באיור – הצלעות הנגדיות הן PQ וְ-RS, PR וְ-QS, PS וְ-QR). נקודות-החיתוך של הצלעות הנגדיות נקראות אלכסוניות (באיור – הנקודות



איור 19

האלכסוניות הן: A , B וְ-T).



איור 20

הוכחת החלוקה ההרמונית בקדקודון הארבעתי

כל ישר, המחבר שתי נקודות אלכסוניות, חותך את צלעות הקדקודון, העוברות דרך נקודה אלכסונית שלישית (או את המשך הצלעות), בשתי נקודות, אשר יחד עם הנקודות האלכסוניות הראשונות – יוצרות את החלוקה ההרמונית.

לדוגמה

באיור 8 הישר AB חותך את המשכי הצלעות RS וְ-PQ (העוברות דרך נקודה אלכסונית E) בנקודה C וְ-D, באופן שהן מחלקות את הקטע AB חלוקה הרמונית.

לצורך ההוכחה נגדיר תחילה את המושג "רביעייה הרמונית של ישרים", ונוכיח תכונה ייחודית וחשובה של רביעייה זו.

הגדרה

הנקודות C וְ-D הן נקודות, המחלקות את הקטע AB חלוקה הרמונית, כשהנקודה O נמצאת מחוץ לישר AB, כפי שנראה באיור 20, ארבעת הישרים, שכל אחד מהם עובר דרך הנקודה O ואחת מהנקודות A, B, C וְ-D, יוצרים אלומת-ישרים, שנקראת <u>רביעייה הרמונית של ישרים</u>.

תכונה של רביעייה הרמונית של ישרים [מקור (13)].

נקודות- החיתוך של ישר כלשהו, החותך את כל ארבעת הישרים של הרביעייה ההרמונית, מהוות חלוקה הרמונית.

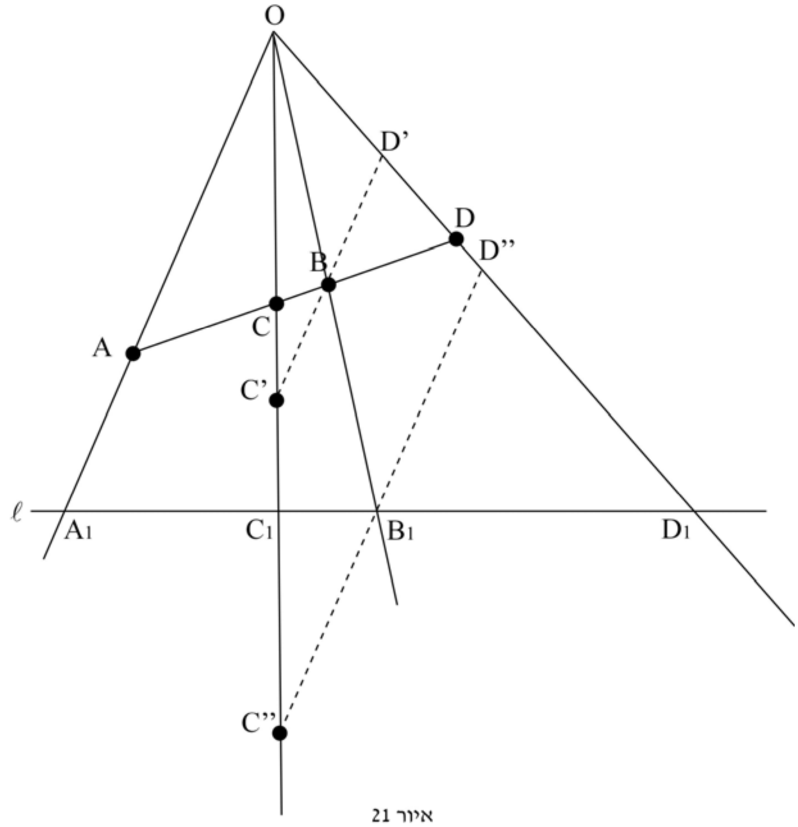
הישרים: OA, OB, OC וְ-OD מהווים אלומה הרמונית (כלומר, הנקודות C וְ-D מחלקות את הקטע AB חלוקה הרמונית), כפי שנראה באיור 21.

הישר ℓ חותך את הישרים של הרביעייה ההרמונית בנקודות:

A_1 , B_1 , C_1 וְ-D_1.

הוכיחו, שהנקודות C_1 וְ-D_1 מחלקות את הקטע A_1B_1 חלוקה הרמונית.

דרך הנקודות B וְ-B_1 נעביר את הישרים $C'BD'$ וְ-$C''B_1D''$, המקבילים לישר OA, כאשר הישר הראשון חותך את הישרים OC וְ-OD בנקודות C' וְ-D' בהתאמה, והישר השני חותך אותם בנקודות C'' וְ-D'' בהתאמה.



איור 21

מדמיון המשולשים:

$\Delta COA \sim \Delta CBC'$ נובע היחס: $\dfrac{CB}{CA} = \dfrac{BC'}{AO}$

מדמיון המשולשים:

$\Delta DAO \sim \Delta DBD'$ נובע היחס: $\dfrac{DB}{DA} = \dfrac{BD'}{AO}$

מחלוקת הפרופורציות הנ"ל נקבל את הקשר:

$$\frac{CB}{CA} : \frac{DB}{DA} = \frac{BC'}{BD'} \quad (1)$$

כיוצא בזה מדמיון המשולשים: $\Delta C_1A_1O \sim \Delta C_1B_1C''$ נובע היחס: $\dfrac{C_1B_1}{C_1A_1} = \dfrac{B_1C''}{A_1O}$

ומדמיון המשולשים, $\Delta D_1A_1O \sim \Delta D_1B_1D''$ נובע היחס: $\frac{D_1B_1}{D_1A_1}=\frac{B_1D''}{A_1O}$

מצד אחד, מחלוקת שתי הפרופורציות האחרונות – נקבל את הקשר:

$$\frac{C_1B_1}{C_1A_1}:\frac{D_1B_1}{D_1A_1}=\frac{B_1C''}{B_1D''} \quad (2)$$

מצד שני, מהמקבילות של הישרים $C'D' \| C''D''$ נובע, כי

$$\frac{BC'}{B_1C''}=\frac{BD'}{B_1D''}=\left(\frac{OB}{OB_1}\right)$$

ומכאן ש - $\frac{BC'}{BD'}=\frac{B_1C''}{B_1D''}$ (3)

מהשוואת-השוויונים: (1), (2), וְ-(3) מתקבל שוויון-היחסים הבא:

$$\frac{CB}{CA}:\frac{DB}{DA}=\frac{C_1B_1}{C_1A_1}:\frac{D_1B_1}{D_1A_1} \quad (4)$$

מהנתון, שנקודות C וְ-D מחלקות את הקטע AB חלוקה הרמונית, נובע הקשר:

$$\frac{CB}{CA}=\frac{DB}{DA}.$$

מכאן ערך האגף השמאלי בשוויון (4) הוא 1.

יוצא מכך ש- $\frac{D_1B_1}{D_1A_1}=\frac{C_1B_1}{C_1A_1}$.

זאת אומרת, שהנקודות C_1 וְ- D_1 מחלקות את הקטע A_1B_1 חלוקה הרמונית.

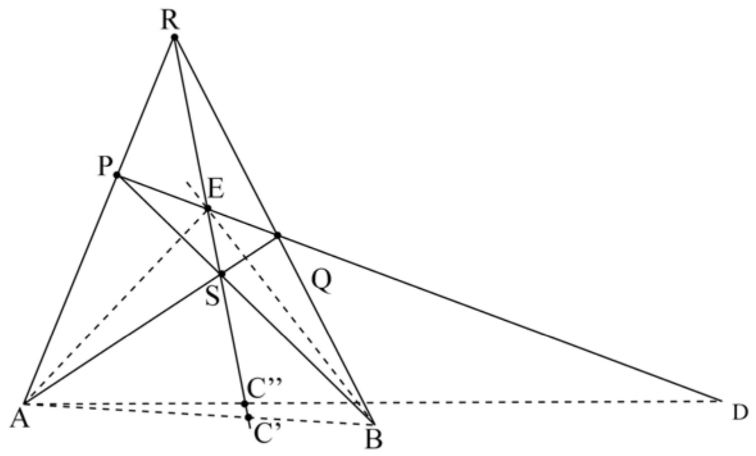
על סמך הוכחה זו, ניתן להוכיח את תכונת החלוקה ההרמונית בקדקודון ארבעתי.

לשם כך יש להתבונן בקדקודון הארבעתי $PQRS'$, שהנקודות B, A וְ-E הן נקודות אלכסוניות שלו (איור 22).

על המשך הצלע PQ נבחר נקודה D באופן שהנקודות E וְ-D מחלקות את הקטע PQ בחלוקה הרמונית.

לפי ההגדרה, אלומת הישרים; BP, BE, BQ, וְ-BD – מהווה רביעייה הרמונית.

בהתאם לתכונה של רביעייה הרמונית, הרי מצד אחד, חותך הישר RS את הישרים של הרביעייה הנ"ל בנקודות: E, S, R, וְ- C' בהתאמה (כאשר C' היא נקודת-החיתוך של הישרים RS וְ-BD), באופן כזה שנקודות E וְ- C' מחלקות את RS חלוקה הרמונית. מצד שני, גם הישרים AP, AE, AQ וְ-AD מהווים רביעייה הרמונית. לכן הישר RS חותך אותם בנקודות: R, E, S, וְ- C'' בהתאמה (כאשר C'' היא נקודת-החיתוך של הישרים RS וְ-AD), באופן כזה שנקודות E וְ- C'' מחלקות את הקטע RS חלוקה הרמונית.



איור 22

משתי המסקנות האחרונות – נובע, כי הנקודות C' וְ- C'' מתלכדות (לאחר המסקנה – נסמן אותה באות C).

הסקנו, שהישרים BD וְ-AD עוברים דרך אותה נקודה C, השייכת לישר RS. זאת אומרת, שהנקודות C וְ-D שייכות לישר AB.

לכן רביעיית הישרים ההרמונית: RP, RE, RQ וְ-RD חותכת את הישר AB בנקודות: A, C, B, וְ-D בהתאמה (כפי שנראה באיור 8).

על-פי תכונת רביעייה הרמונית הנקודות C וְ-D מחלקות את הקטע AB חלוקה הרמונית.

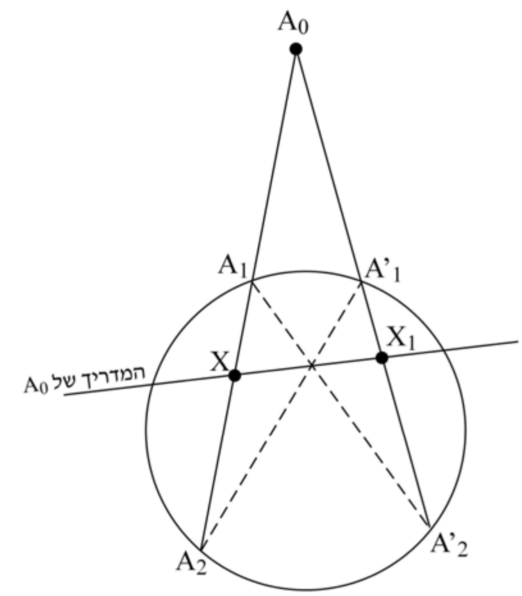
מ.ש.ל.

המתעניינים בתכונות של ארבעון קדקודי - מוזמנים לעיין במקור (12).

ג' – הגדרה של מוקד ומדריך

נתון מעגל, ונקודה A_0 מחוצה לו. נעביר למעגל – חותך, העובר דרך הנקודה A_0 וחותך אותו בשתי נקודות A_1 וְ- A_2. קיימת נקודה X על החותך, אשר יחד עם הנקודה A_0 מחלקת את הקטע A_1A_2 חלוקה הרמונית, כמו שנראה באיור 23.

כל הנקודות, המקיימות חלוקה הרמונית לחותכים, היוצאים מנקודה A_0, נמצאות על ישר, הנקרא המדריך של הנקודה A_0, כאשר A_0 הוא המוקד של ישר זה.



איור 23