משה סטופל ושלמה חריר

"יפה היא הגאומטריה" –חיזוק ההיגד ע"י הצגת דרכי פתרון אחדות לאותה משימה

תקציר

לשם המחשת יופיה של הגאומטריה הובאו 7 משימות מגוונות: לכל משימה הוצגו מספר דרכי פתרון (2-4). הפתרונות התבססו על שימוש בכלים של הנדסת-מישור בלבד: משפטים ובניות-עזר.

ודאי קיימות דרכי-פתרון נוספות לאותן המשימות.

המטרה המרכזית של המשימות שנבחרו הייתה להעצים את הפוטנציאל של הנדסת-המישור – כתחום, המאפשר לגרות ולהרחיב את שדה-החשיבה. כך נמצאו דרכי-פתרון מגוונות, ובתוכן – קצרות ופשוטות יותר, הכוללות מרכיב של יופי, שיתרמו להגברת ההנאה והסיפוק.

הקדמה

דרכי-הלימוד ושיטות-ההוראה במתמטיקה – נגזרות מתכנית-הלימודים וממטרותיה. אחת המטרות המרכזיות של לימודי-המתמטיקה היא להקנות לתלמידים דרכי-חשיבה, העשויות לסייע להם בתחומי למידה ודעת אחרים, ולפתחן.

המשמעות של "ללמוד לחשוב" – פירושה: על המורה למתמטיקה לפתח את יכולתם של התלמידים ליישם מידע ולבצע אנליזה וסינתזה ברמה נאותה של תכונות-יסוד, כללים ומשפטים, שלימד בשלבים הקודמים של תהליך-ההוראה.

פתרון בעיות שונות הוא אחד האמצעים החשובים לפיתוח החשיבה:

במהלך פתרון בעיות בכיתה – נשאלים התלמידים שאלות-הַכְוונה, כגון: "האם ניתן ליישם את המסקנה של התרגיל הקודם לפתרון בעיה זו?", "האם השאלה אינה מקרה פרטי של השאלה הקודמת?", "האם נפגשתם עם בעיה מסוג כזה, והיכן?", "האם ניסוח השאלה דומה?".

מטרת שאלות כאלה היא לגרות ולהרחיב את שדה-החשיבה ולהכין את התלמיד להתמודדות עצמאית, שהוא עצמו יצטרך לשאול את השאלות ולהשיב עליהן.

תארנים: *שילוב תחומים במתמטיקה, דרכי פתרון שונות.*

מילות מפתח: *ייחודה של הגיאומטריה, משימות בהנדסת-מישור*

* הוצג בחלקו במסגרת הרצאה שנישאה בכנס השנתי של העוסקים בהוראה, במחקר ובפיתוח בתחום המתמטיקה לעל-יסודי בישראל, כפר המכביה, מרץ 2007.

תנופה לפיתוח החשיבה מתקבלת מפתרון בעיות בשיטות שונות:

מציאת דרך פתרון נוספת ע"י שימוש באותו תחום מתמטי – ובמיוחד מתחום אחר – מסייעת לפיתוח-החשיבה ומעלה אותה לרמה גבוהה יותר.

יישום ידע קודם בסיטואציה חדשה, המביא לפתרון קצר ופשוט יותר או יפה יותר – מגביר את ההנאה והסיפוק בלימודי המקצוע.

שילוב תחומים בפתרון בעיות – פותח לתלמידים מבט רחב יותר על המתמטיקה כמקצוע מקיף, תוך יצירת קשרים בין ענפיו השונים.

הצלחת פיתוח החשיבה של תלמידים בסיוע פתרון בעיות מגוונות במתמטיקה – תלויה במידה רבה ביכולתו של המורה ליצור ולעורר גירויים מתאימים בתהליך ההוראה והלימוד, תוך הבלטת יופיה של המתמטיקה.

פתרון בעיה בדרך רגילה – מותיר בדרך כלל את התלמידים בשלווה וללא תגובה מיוחדת.

לעומת זאת, פתרון שונה לאותה הבעיה – עשוי לגרום להתלהבות רגשית. הפתרון המיוחד והיפה הוא בלתי-צפוי, אך מוחשי, ולרוב – פשוט וקצר יותר.

דרכים **רגילות** משרישות פתרונות טכניים המתקבלים אוטומטית.

לעומתן, דרכים **לא** שגרתיות מאפשרות יוזמות חדשות ומפתחות מיומנויות נוספות. במידה רבה דומה הדבר להבדל שבין דרך אלגברית לבין פתרון ע"י ניסוי וטעייה של בעיות מילוליות. השימוש בדרכים חלופיות מצביע על המתמטיקה – כשטח קסום פתרונות מפתיעים.

ואכן בעת האחרונה ניתן לראות ממספר מאמרים שעוסקים בתחום (6-1), שקיימת נטייה הולכת וגוברת לשימוש בדרכים חלופיות – ככלי לפיתוח מצוינות, לפיתוח יצירתיות ולהצגת המתמטיקה – כמקצוע מורכב ממכלול של תחומים, המשולבים זה בזה.

מניסיון רב-שנתי בהוראת-מתמטיקה בחטיבה העליונה, בקורסים אקדמאיים ומתהליך ההדרכה וההכשרה של פרחי-הוראה אובחנה החשיבות הרבה של שליטה מקיפה בכלים מתמטיים שונים, המאפשרת התמודדות עם בעיות מורכבות ועם אתגרים, המחייבים שימוש באסטרטגיות פתרון מגוונות.

הנדסת מישור – שילוב תחומים ודרכי פתרון

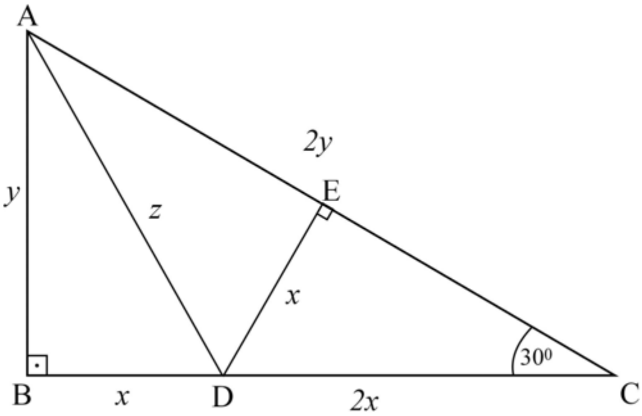
במסגרת העברת קורס אקדמאי בנושא: "שילוב תחומים במתמטיקה" – הצגנו בהנאה לסטודנטים, 8 הוכחות שונות למשפט פיתגורס.

עמיתה בסגל האקדמי, ששמעה על כך, לא רק שלא התלהבה, אלא ציינה בזלזול, שיש לה ספר ששמו "100 הוכחות למשפט פיתגורס". באחד מספרי הלימוד מצוין, שישנן כ-600 הוכחות למשפט פיתגורס, אשר בין חלק רב מהן קיימים הבדלים מזעריים בנימוקי ההוכחה. המגוון הרחב של הוכחות למשפט פיתגורס הוא עדות ליופיה ולעושרה של המתמטיקה.

מבין ענפי-המתמטיקה – הנדסת המישור היא אחד מהענפים המרהיבים ביותר בגלל המספר הרב של דרכי-פתרון, שאפשר להשיג בה. כתחום, המבוסס על אקסיומות ומשפטי-יסוד, שעליהם מתפתחים משפטים באופן מודולרי, וקיים בו שימוש בבניות-עזר ובבניות חלופיות – ניתן למצוא בו דרכי פתרון שונות לאותה משימה, שחלקן סטנדרטיות ללא ייחוד בולט – מצד אחד, וקיימות דרכים אחרות בלתי-שגרתיות, קצרות מאד ומרשימות ביופיין – מצד שני.

במהלך בדיקת בחינות בגרות של מאות נבחנים – נמצאו דרכי פתרון שונות לאותן שאלות, ובמיוחד – לשאלות בהנדסת מישור, שמופיעות בשאלון 005. ממצא זה מצביע הן על העובדה, שמורים מלמדים בשיטות ובדרכים מגוונות, בהדגשים אלה ואחרים, תוך שימוש במספר כלים, והן על עובדת יכולתם של התלמידים ליישם אותם בצורות שונות.

במאמר זה נציג 7 משימות הנדסיות, כשלכל משימה יובאו מספר דרכי פתרון (רק מתחום ההנדסה), ושחלקן נמצאו ע״י הסטודנטים בקורס: ״בעיות נבחרות בהנדסה״. משימות 5-7 הן משימות בעלות קושי רב, שמסומנות בדרך כלל בספרי הלימוד ב- **. את הפתרונות של משימות 6-7 ניתן למצוא באמצעות טריגונומטריה ובדרכים נוספות.



<u>בעיה 1</u>

נתון משולש ישר זווית ΔABC ($\measuredangle B = 90^0$), אשר בו $\measuredangle ACB = 30^0$, הנקודה D מחלקת את הצלע BC באופן ש-$CD=2DB$.

הוכח, שהישר AD חוצה את הזווית $\measuredangle BAC$.

נסמן: $BD=X$ וְ-$DC=2X$, וכן נחשֵב $\measuredangle BAC = 60^0$.

הוכחה – דרך א׳

נסמן: $AB=y$ וְ-$AC=2y$ (לפי תכונת צלעות במשולש $30^0, 60^0, 90^0$).

ע״י שימוש במשפט פיתגורס במשולש ΔABC מקבלים:

$$(3x)^2 + y^2 = (2y)^2 \Rightarrow y = x\sqrt{3}.$$

נסמן $AD = z$.

ע״י שימוש במשפט פיתגורס במשולש ΔABD נקבל:

$$z^2 = x^2 + y^2 = x^2 + (x\sqrt{3})^2 = 4x^2 \Rightarrow z = 2x$$

מכאן, המשולש ישר-הזווית ΔABD הוא בעל ניצב BD, הַשָּׁווה למחצית היתר AD.

לכן, $\measuredangle BAD = 30^0$.

לכן, $\measuredangle DAC = 30^0$, והישר AD חוצה את הזווית $\measuredangle BAC$.

מ.ש.ל.

הוכחה – דרך ב'

מהנקודה D נוריד אנך DE ליתר AC. לפי תכונת אורכי הצלעות במשולש ΔDEC $(30^0, 60^0, 90^0)$, אורכו של DE הוא X $(DE = X)$.

המשולשים: ΔABD וְ- ΔAED חופפים לפי המשפט צ.צ.ז. לכן, $\measuredangle BAD = \measuredangle DAE$, והישר AD חוצה את הזווית $\measuredangle BAC$,

מ.ש.ל.

הוכחה – דרך ג'

הישר AD חותך את הצלע BC באופן ש- $\frac{CD}{AB} = 2$, וכן, $\frac{AC}{AB} = 2$ (כפי שהוסבר בפתרון של דרך א').

לכן היות וְ- $\frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AB}$ הרי ש-AD הוא חוצה-זווית לפי המשפט ההפוך למשפט חוצה-הזווית .

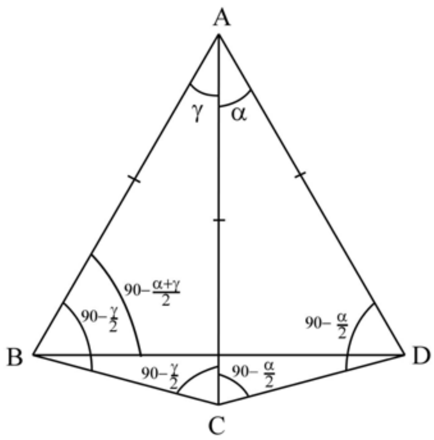
בעיה 2

נתון: $AB = AC = AD$

הוכח, כי: $\measuredangle DBC = \frac{1}{2}\measuredangle CAD$.

הוכחה – דרך א'

נחשב את הזוויות במשולשים שווי-השוקיים לאחר סימון זוויות.



סימון זוויות וחישובן

$$\measuredangle CAD=\alpha \Rightarrow \measuredangle ACD=\measuredangle ADC=90-\frac{\alpha}{2}$$

$$\measuredangle BAC=\gamma \Rightarrow \measuredangle ABC=\measuredangle ACB=90-\frac{\gamma}{2}$$

$$\measuredangle BAD=\alpha+\gamma \Rightarrow \measuredangle ABD=\measuredangle ADB=90-\frac{\alpha+\gamma}{2}$$

מכאן:

$$\measuredangle DBC=\measuredangle ABC-\measuredangle ABD=90-\frac{\gamma}{2}-(90-\frac{\alpha+\gamma}{2})=\frac{\alpha}{2}$$

מ.ש.ל.

הוכחה – דרך ב'

הנקודה A היא מרכז המעגל, העובר דרך הנקודות C, B וְ-D. על-כן, $\measuredangle DBC=\frac{1}{2}\measuredangle CAD$ על פי המשפט: "זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית, הנשענת על אותה קשת".

מ.ש.ל.

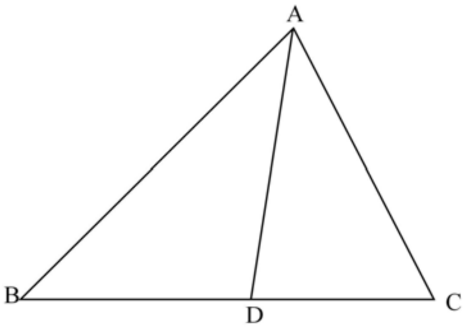
בעיה 3

במשולש ΔABC נתון: AD –

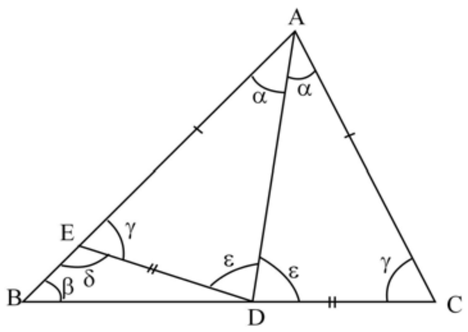
חוצה-זווית $\measuredangle BAC$, $AB>AC$

הוכח, כי: $BD>DC$

<u>הערה</u>: בעיה זו הוצגה באחד מספרי הלימוד בפרק: "קשרים בין צלעות וזוויות במשולש", הנלמד בשלבים הראשונים של לימודי ההנדסה.



הוכחה – דרך א'



נסמן: $\measuredangle BAC = 2\alpha$, $\measuredangle ABC = \beta$, $\measuredangle ACB = \gamma$.

מהנתון: $AB > AC$ נובע ש- $\gamma > \beta$. עם העברת חוצה-הזווית AD הרי הקטעים BD וְ-DC נמצאים, לכאורה, בשני משולשים שונים. כדי להביא לכך שהם יימצאו ממש באותו משולש – נעתיק קטע AE, שאורכו שווה ל-AC על הצלע AB – כפי שנראה באיור.

המשולשים: ΔADC וְ- ΔADE חופפים לפי צ.ז.צ. , לכן

$$\measuredangle D_1 = \measuredangle D_2 = \varepsilon$$

$$\measuredangle AED = \measuredangle ACD = \gamma$$

$$DE = DC$$

נסמן: $\measuredangle BED = \delta$

$\varepsilon > \beta$ (זווית חיצונית למשולש ΔADB)

$\delta > \varepsilon$ (זווית חיצונית למשולש ΔDEA).

מכאן:

$$\delta > \varepsilon > \beta$$

מסקנה

במשולש ΔBDE, $\delta > \beta$, ולכן $BD > DE = DC$,

(מול הזווית הגדולה – נמצאות הצלע הגדולה).

מ.ש.ל.

הוכחה – דרך ב׳

AD הוא חוצה-זווית במשולש $\measuredangle ABC$. לפי משפט חוצה-הזווית, $\frac{BA}{AC}=\frac{BD}{DC}$.

לפי הנתון, $\frac{AB}{AC}>1$. לכן, $\frac{BD}{DC}>1 \Rightarrow BD>DC$,

מ.ש.ל.

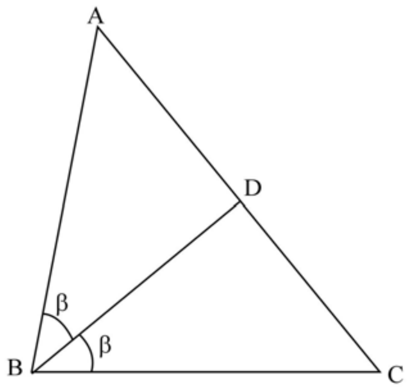
<u>הערה</u>: המסקנה מהפתרון בדרך ב׳ הוא שֶׁיֶּדַע נרחב מאפשר תשובה מידית ופשוטה ללא צורך בבניות-עזר.

בעיה 4

הוכחות שונות למשפט חוצה הזווית.

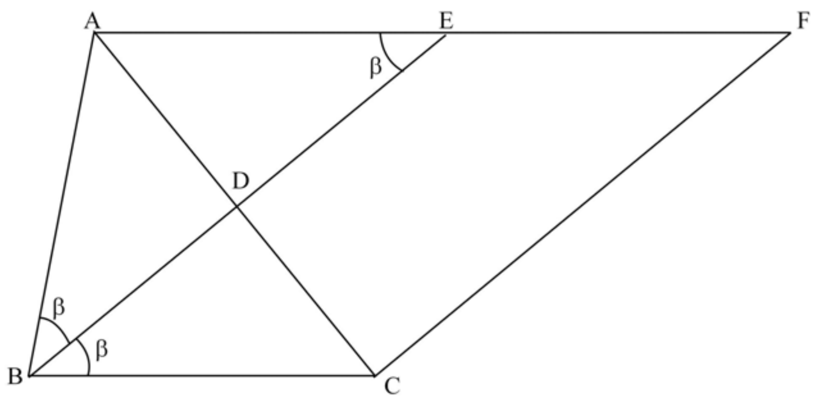
BD – חוצה-זווית במשולש ΔABC. הוכח, שחוצה הזווית מחלק את הצלע שהוא חותך – לשני חלקים, המתייחסים זה לזה כיחס הצלעות, הכולאות את הזווית.

צ״ל: $\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}$



הוכחה – דרך א׳

ההוכחה הקלסית, הנמצאת בספרי הלימוד היא הבאה: דרך הקדקוד A נעביר ישר, המקביל לבסיס BC. חוצה-הזווית BD חותך ישר זה בנקודה E. דרך הקדקוד C נעביר ישר מקביל לחוצה-הזווית BD, החותך את המשך הישר AE בנקודה F. המרובע $BEFC$



הוא מקבילית (לפי הבנייה), ולכן $BC = EF$.

משולש ΔABE הוא משולש ש״ש, לפי זוויות מתחלפות שוות בין מקבילים (β) .

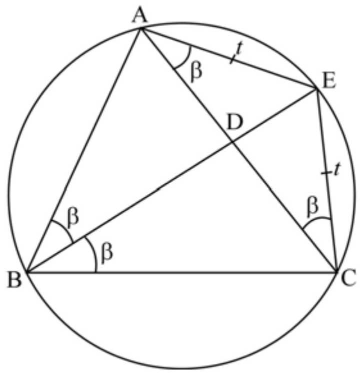
לכן, $AB = BE$.

$\frac{AE}{EF} = \frac{AD}{BC}$, לפי משפט תלס על ישרים מקבילים, החותכים שוקי זווית $\measuredangle CAF$.

כפי שהוכח: $AB = AE$, $EF = BC$, ולכן נקבל: $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$

מ.ש.ל.

הוכחה – דרך ב׳



נבנה את המעגל, החוסם את המשולש ΔABC. חוצה-הזווית BD חותך את המעגל בנקודה E. נחבר בישרים את הנקודה E עם הקדקודים A וְ-C.

$\measuredangle EAC = \measuredangle ECA = \beta$ (זוויות היקפיות, הנשענות על אותה הקשת), ולכן $EA = EC = t$.

המשולשים: ΔBDC וְ- ΔBDE דומים זה לזה לפי ז.ז.

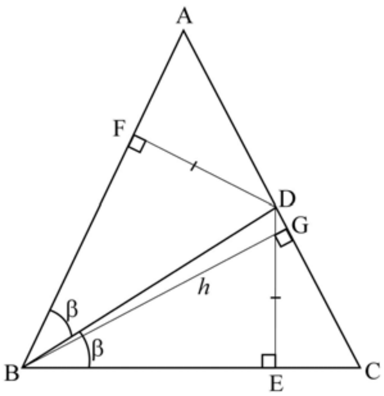
לכן, $\frac{BC}{t} = \frac{DC}{DE} \Rightarrow t = \frac{BC \cdot DE}{DC}$

המשולשים: ΔBAD וְ- ΔCDE דומים זה לזה לפי ז.ז.

לכן, $\frac{AB}{t} = \frac{AD}{DE} \Rightarrow t = \frac{AB \cdot DE}{AD}$

מכאן, $\frac{BC \cdot DE}{DC} = \frac{AB \cdot DE}{AD} \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$

מ.ש.ל.



הוכחה – דרך ג'

מהקדקוד D נוריד גבהים DE וְ-DF לצלעות BC וְ-AB בהתאמה.

$DE = DF$, לפי התכונה של נקודה, הנמצאת על חוצה-זווית.

$$S_{\Delta}ADB = \frac{AB \cdot DF}{2}, \quad S_{\Delta}BDC = \frac{BC \cdot DE}{2} \quad \Rightarrow \frac{S_{\Delta}ADB}{S_{\Delta}BDC} = \frac{AC}{BC} \qquad (*)$$

מהקדקוד B נוריד גובה לצלע AC, ונסמן אותו ב-h.

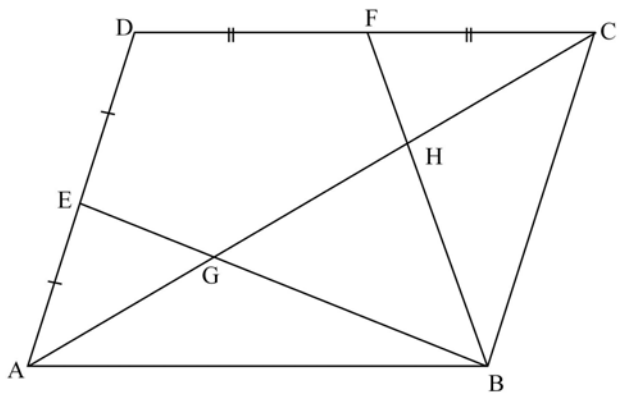
$$S_{\Delta}ADB = \frac{AD \cdot h}{2}, \quad S_{\Delta}BDC = \frac{DC \cdot h}{2} \quad \Rightarrow \frac{S_{\Delta}ADB}{S_{\Delta}BDC} = \frac{AD}{DC} \qquad (**)$$

(הערה: הגובה $BG = h$ הוא הגובה המשותף לשני המשולשים).

מההשוואה בין (*) וְ-(**) נקבל: $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$

מ.ש.ל.

בעיה 5

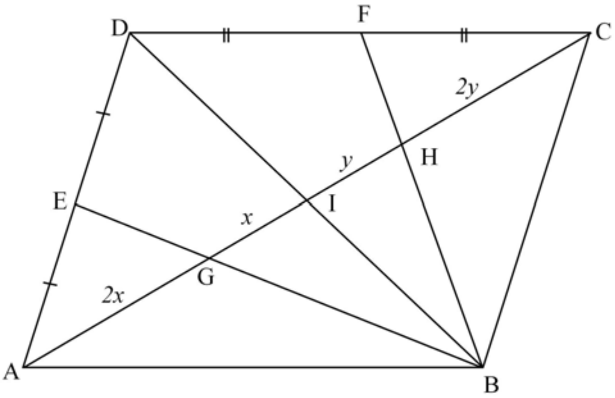


נתון:

$ABCD$ היא מקבילית.

את הנקודות E וְ-F, נקודות-האמצע של הצלעות AD וְ-DF בהתאמה, נחבר עם הקדקוד B. הישרים BE וְ-BF חותכים את האלכסון AC בנקודות G וְ-H בהתאמה.

הוכח, כי $AG = GH = HC$



הוכחה – דרך א'

נעביר את האלכסון BD (I- נקודת מפגש האלכסונים). במשולש ΔABD, BE וְ-AI הם תיכונים (AC וְ-DB – אלכסוני המקבילית חוצים זה את זה).

נסמן: $GI = x$.

מתכונות נקודת חיתוך התיכונים במשולש – נקבל $AG = 2x$.

במשולש ΔCBD, BF וְ-CI הם תיכונים.

נסמן: $IH = y$ ונקבל לפי אותו הסבר, $HC = 2y$.

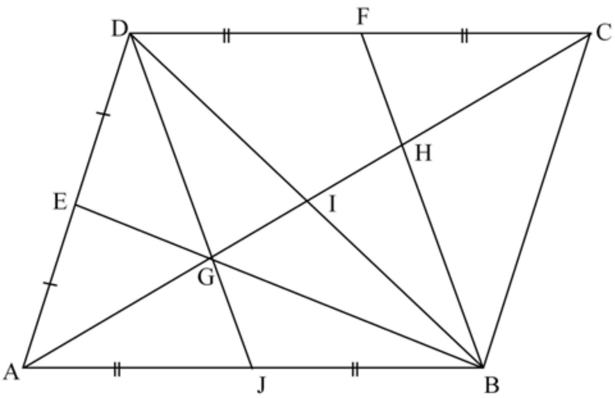
מכאן, $HC = 2y$, $GH = x + y$, $AG = 2x$

מהעובדה, ש- $AI = IC$ נקבל: $2x + x = 2y + y \Rightarrow x = y$

ולכן, $AG = GH = HC$.

מ.ש.ל.

הוכחה – דרך ב'



נעביר את האלכסון BD. נחבר את הנקודות D וְ-G. המשך הישר חותך את הצלע AB בנקודה J. DJ הוא התיכון השלישי במשולש ΔADB, ועל כן $AJ = JB$.

מכאן נובע, ש-$DJBF$ מקבילית (מרובע בעל זוג אחד של צלעות שוות ומקבילות).

GJ – קטע אמצעים במשולש ΔABH (הישר, שיוצא מאמצע צלע במשולש ומקביל לצלע שנייה). לכן $AG = GH$.

כנ"ל, HF – קטע אמצעים במשולש ΔCDG, ולכן, $GH = HC$.

מהטרנזטיביות נובע $AG = GH = HC$.

מ.ש.ל.

הוכחה – דרך ג'

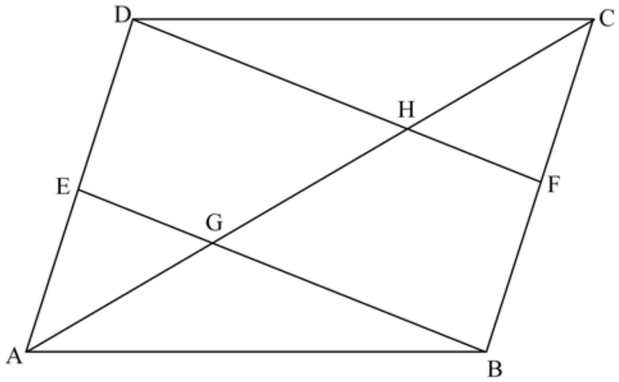
כבדרך ב' נעביר את DJ. מהקדקוד C נעביר ישר מקביל ל-BF, החותך את המשך הצלע AB בנקודה K. המרובע $FCKB$ מקבילית.

מכאן נובע: $AJ = JB = BK$, היות וְ- $GJ \| GH \| HC$,

וממה שהוכח, $AJ = JB = BK$, הרי שלפי משפט תלס לגבי משולש ΔACK, נקבל $AG = GH = HC$,

מ.ש.ל.

משימת המשך (ללא פתרון)



הנתון: $ABCD$ היא מקבילית. את הנקודות: E ו-F נקודות האמצע של הצלעות: AD ו-BC בהתאמה – נחבר עם הקדקודים B ו-D כנראה באיור.

הוכח, כי: $AG=GH=HC$.

בעיה 6

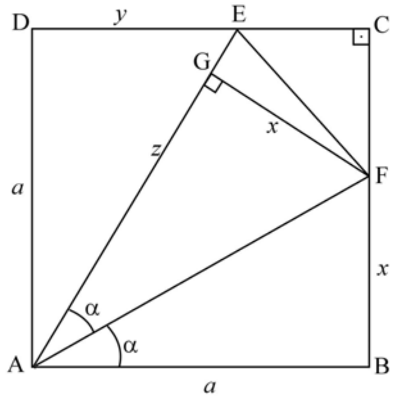
נתון ריבוע $ABCD$, שאורך צלעו a.

דרך קדקוד A נעביר ישר כלשהו, החותך את הצלע DC בנקודה E. דרך הקדקוד A נעביר את חוצה-הזווית של הזווית $\measuredangle EAB$, החותך את הצלע BC בנקודה F.

הוכח, כי:

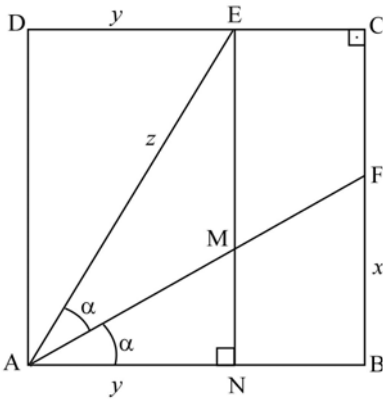
$BF + DE = AE \quad (x + y = z)$.

נסמן: $\measuredangle EAB = 2\alpha$, $BF = x$, $DE = y$, $AE = z$.



הוכחה – דרך א'

מנקודה F נוריד אנך FG לקטע AE. לפי תכונת נקודה, הנמצאת על חוצה זווית $BF = FG = x$.



נחשב את שטח הריבוע $ABCD$ באמצעות שטחי ארבעת המשולשים המרכיבים אותו.

$$S_{\square}ABCD = S_{\Delta}ABF + S_{\Delta}FCE + S_{\Delta}EFA + S_{\Delta}ADE$$

$$a^2 = \frac{a \cdot x}{2} + \frac{(a-x)\cdot(a-y)}{2} + \frac{z \cdot x}{2} + \frac{a \cdot y}{2}$$

לאחר פישוט – נקבל: $a^2 = x(y+z)$.

שימוש במשפט פיתגורס במשולש ΔADE נותן: $a^2 = z^2 - y^2$

הצבת קשר זה מניבה $z^2 - y^2 = x(y+z)$

לאחר צמצום שני האגפים ב- $(y+z)$ נקבל: $x + y = z$.

מ.ש.ל.

הוכחה – דרך ב'

מהנקודה E מורידים אנך EN לצלע AB. מסמנים ב-M את נקודת החיתוך שלו עם חוצה הזווית AF. ע"י שימוש במשפט חוצה-הזווית במשולש ΔAEN, נקבל

$$\frac{z}{y} = \frac{EM}{MN} \quad (*)$$

המשולשים: ΔAMN וְ- ΔAFB דומים, ועל-כן ניתן לרשום את הפרופורציה:

$$\frac{y}{a} = \frac{MN}{x} \Rightarrow MN = \frac{x \cdot y}{a} \quad (**)$$

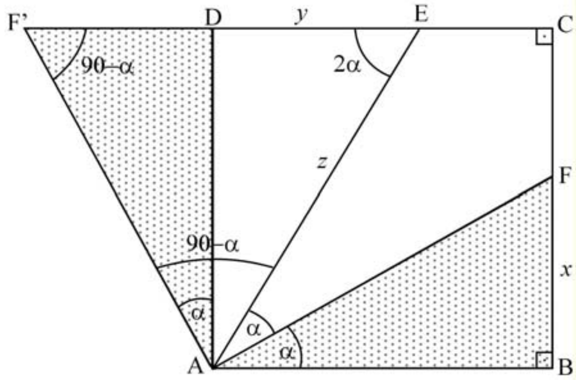
$$EM = a - MN = \frac{a^2 - xy}{a} \quad (***)$$

נציב ב-(*) את הקשרים: (**), (***) ונקבל $a^2 = x(y+z)$.

בעזרת משפט פיתגורס במשולש ΔADE נקבל $x + y = z$.

מ.ש.ל.

הוכחה – דרך ג׳



נעתיק את משולש ΔABF באופן שצלע AB מתלכדת עם הצלע AD.

המשולש $\Delta F'EA$ הוא משולש ש״ש, משום שהוא בעל שתי זוויות שוות;

$\measuredangle EF'A = \measuredangle EAF' = 90-\alpha$.

<u>מסקנה</u>

$$EF' = EA \Rightarrow x+y=z$$

מ.ש.ל.

הוכחה – דרך ד׳

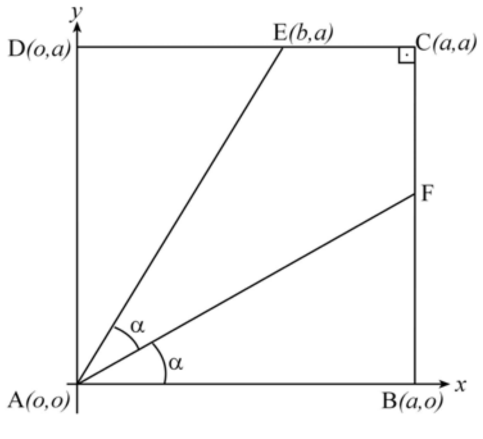
נשתמש בכללים של הנדסה אנליטית. נמקם את הריבוע במערכת צירים באופן שהקדקוד A יתלכד עם ראשית הצירים, והצלעות AB וְ- AD יהיו מונחות על הצירים x וְ-y בהתאמה. שיעורי הקדקודים הם כדלקמן:

$C(o,a), B(a,o), A(o,o)$ וְ- $D(o,a)$.

נבחר נקודה E על הצלע DC, ששיעוריה $E(b,a)$, באופן ש- $b \prec a$.

משוואת הצלע AB היא $y=o$

משוואת הישר AE היא $y = \frac{a}{b}x$



כשנתונים שני ישרים באמצעות המשוואות הכלליות שלהם:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=o \\ a_2x+b_2y+c_2=o \end{cases}$$

משוואות חוצי-הזוויות הן כדלקמן:

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{{a_1}^2+{b_1}^2}} = \pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{{a_2}^2+{b_2}^2}}$$

בהתאם למשוואת הכלליות של הישרים AF וְ-AB,

$$\begin{cases} ax - by = o \\ y = o \end{cases}$$

נקבל, שמשוואות חוצי-הזויות שלהם: $\frac{ax-by}{\sqrt{a^2+b^2}} = \pm y$

והמשוואה המפורשת של חוצה-הזווית $\measuredangle EAB$ (בעל השיפוע החיובי, המתאים לישר AF) היא,

$y = \frac{a}{b+\sqrt{a^2+b^2}} \cdot x$. לכן שיעורי הנקודה F הם: $F(a, \frac{a}{b+\sqrt{a^2+b^2}})$

לפי שיעורי הקדקודים (A,B,C,D,E,F) נקבל את אורכי הקטעים: $BF = \frac{a^2}{b+\sqrt{a^2+b^2}}$,

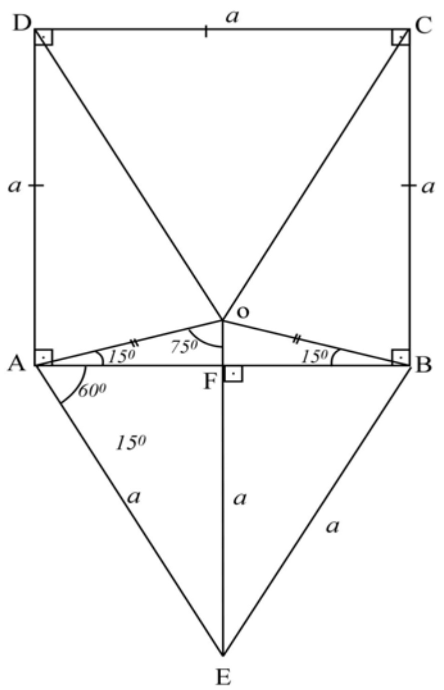
$DE = b$, $AE = \sqrt{a^2+b^2}$. באמצעות טכניקה אלגברית פשוטה (כולל הכפלת מונה ומכנה

בצמוד של המכנה) – ניתן להוכיח בקלות, ש- $b + \frac{a^2}{b+\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{a^2+b^2}$

כלומר, $BF + DE = AE$,

מ.ש.ל.

בעיה 7



נתון ריבוע $ABCD$, שאורך צלעו a. דרך הקדקודים A וְ-B נעביר ישרים, היוצרים זווית של 15^0 עם הצלע AB. הישרים נחתכים בנקודה O.

הוכח, כי המשולש ΔDOC הוא משולש ש"צ.

הוכחה – דרך א'

המשולשים: ΔDOA וְ-ΔCOB חופפים לפי צ.ז.צ.

מהחפיפה נובע: $OD = OC$.

על הצלע AB בונים כלפי חוץ משולש ש"צ ΔABE . המרובע $AOBE$ הוא דלתון, ועל כן אלכסוניו, הנחתכים בנקודה F, מאונכים זה לזה.

על-פי חישוב זוויות: $\measuredangle EAO = \measuredangle AOE = 75^0$, ועל כן, $EA = EO = a$

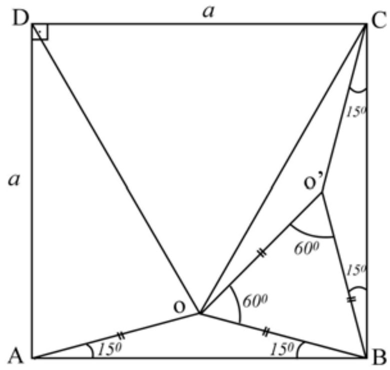
$DA \| OE$ (בשל הניצבות ל-AB)

$DA = OE = a$ (הוכח!).

לכן המרובע $DOEA$ הוא מקבילית (זוג צלעות שוות ונגדיות), אך מאחר שבמקבילית זו ישנן שתי צלעות סמוכות שוות $(DA = AE = a)$, הרי שהיא מעוין. מכאן גם $DO = a$ והמשולש ΔDOC ש״צ.

מ.ש.ל.

הוכחה – דרך ב'



דרך הקדקודים B וְ-C נעביר ישרים, היוצרים זווית של 15^0 עם הצלע BC. הישרים נחתכים בנקודה O'.

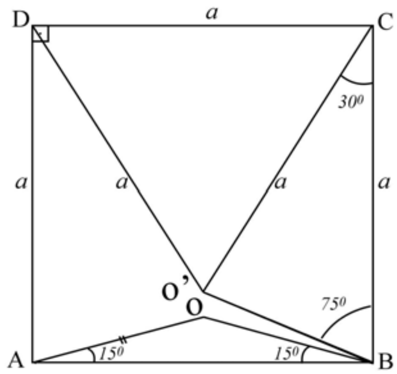
המשולש $\Delta BOO'$ הוא ש״צ.

ע״י חישוב-זוויות נקבל: $\measuredangle OCO' = 15^0$. מזה נובע, ש- $\measuredangle OCB = 30^0$,

ולכן, $\measuredangle DCO = 60^0$ והמשולש ΔDOC הוא ש״צ.

מ.ש.ל.

הוכחה – דרך ג'



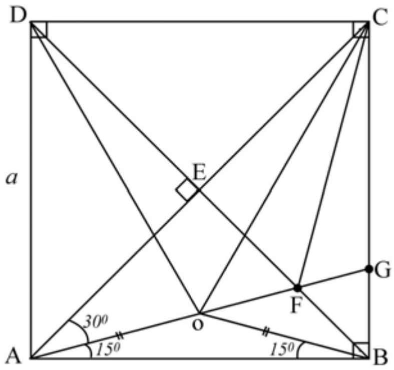
נציג הוכחה בדרך השלילה:

המשולש $\Delta DCO'$ הוא משולש ש״צ. לפי זה, הזווית $\measuredangle O'CB = 30^0$ היא זווית-ראש במשולש ש״ש $\Delta O'CB$.

לכן, $\measuredangle CBO' = 75^0$. היות והזווית בקדקוד B היא בת 90^0, הדבר מחייב, שהקדקודים O וְ-O' יתלכדו – בסתירה לנתון, כלומר, ΔDOC הוא ש״צ.

מ.ש.ל.

הוכחה – דרך ד׳



נעביר את אלכסוני הריבוע, ונסמן ב-E את נקודת-החיתוך שלהם. ההמשך של AO חותך את האלכסון בנקודה F ואת הצלע BC בנקודה G.

לפי חישוב זוויות נקבל: $\measuredangle CAO = 30^0$.

נחבר את הנקודה F עם הקדקוד C.

FD הוא אנך אמצעי לאלכסון AC.

מתכונת האנך האמצעי – נקבל:

$$\measuredangle EAO = \measuredangle ECO = 30^0$$

$$\measuredangle EFA = \measuredangle EFC = 60^0 ,$$

מחישוב זוויות נקבל:

$$\measuredangle CFO = \measuredangle CFB = 120^0 , \measuredangle ECG = 15^0 ,$$

$$\measuredangle FOB = \measuredangle FBO = 30^0 \Rightarrow FO = FB$$

המשולשים: ΔCFO וְ- ΔCFB חופפים עפ״י צ.ז.צ. מהחפיפה נקבל: $\measuredangle OCF = \measuredangle FCB = 15^0$, ומכאן, $\measuredangle OCB = 30^0 \Rightarrow \measuredangle OCD = 60^0$. לכן המשולש ΔODC הוא ש״צ.

מ.ש.ל.

סיכום

המשימות שהוצגו הן חלק קטן ביותר ממכלול רחב של בעיות הנדסה, שניתן למצוא להן יותר מדרך פתרון אחת.

מגוון הפתרונות מצביע על יופייה של המתמטיקה ומעורר דחף ואתגר למציאת פתרונות נוספים, לעתים מפתיעים ובלתי שגרתיים. פתרונות אלו מקנים מיומנות כלים ודרכי פתרון ומאפשרים התמודדות עם משימות קשות, אשר רבה תרומתן לפיתוח החשיבה, והן גורמות הנאה רבה לשוחרי המתמטיקה ולחובביה.

ביבליוגרפיה

1. זיסקין, ק', שריקי, ע' (2005). אפשר גם בלי טריגונומטריה – דרך אחרת לחישוב אורכי המחוגים של מעגל חוסם ומעגל חסום של משולש, **על"ה, 35.**

2. לייקין, ר', גורביץ, א' מדיקוב, ל' (2003). **אוגדן משימות מקשרות,** משרד החינוך ואוניברסיטת חיפה.

3. מוגילבסקי, ר', סטופל מ' (תשס"ד). מציאת ערכי קיצון: מינימום/מקסימום, ללא שימוש במחשבון דיפרנציאלי. **"שאנן", כרך ט' – כתב-עת של המכללה האקדמית הדתית לחינוך**, חיפה.

4. סטופל, מ', מוגילבסקי, ר' (תשס"ד). הדגמת דרכי-פתרון שונות לארבע משימות הנדסיות. **"שאנן", כרך ט' – כתב-עת של המכללה האקדמית הדתית לחינוך**, חיפה.

5. א. סאלח, פ' (תשס"ד). הוכחה בדרך אחרת, **על"ה, 31.**

ב. אפלבאום, מ', סמובול, פ' (תשס"ו). תגובה למאמר: "הוכחה בדרך אחרת", **על"ה, 35.**