רחל מוגילבסקי ומשה סטופל

תכונות של ממג"ב וכמק"ב,
הרחבת סימני החלוקה ומשימות במספרים

תקציר

במרבית החישובים באלגברה: חישוב ערך ביטוי אלגברי לערכים נתונים של המשתנה, פתרון משוואות ואי-שוויונים – משתמשים במושגים המרכזים של החשבון: 1. ממג"ב – המחלק המשותף הגדול ביותר. 2. כמק"ב – הכפולה המשותפת הקטנה ביותר.

המאמר מדגיש ומרחיב את התכונות של הממג"ב והכמק"ב, וכן – את הקשר ביניהם.

לכל משפט – מובאת הוכחה ודוגמה מספרית.

במאמר מתוארים ההליכים והשלבים למציאת הממג"ב והכמק"ב:

מרכיב מרכזי בהליכים הללו הוא השימוש בסימני-החלוקה (כללי החלוקה) של המספרים. בנוסף להבאת סימני החלוקה הקלסיים – בוצעה הרחבה של סימני חלוקה שימושיים לכל המספרים, עד (כולל), המספר 25. לכל סימן חלוקה – הובאה הוכחה ומספר דוגמאות.

בסיום המאמר מובא לקט משימות, שפתרונן מבוסס על סימני החלוקה ועל תכונות המספרים, והוא מוגש לעבודה עצמית.

הקדמה

כבר כשמלמדים שברים בלימוד החשבון בביה"ס היסודי, משתמשים במחלק המשותף הגדול ביותר – לצורך צמצום שברים ובכפולה המשותפת הקטנה ביותר למציאת המכנה המשותף לצורך חיבור או חיסור של שברים.

למשל, במשימה הבאה המשמשת דוגמה – משתמשים במכפלה המשותפת הקטנה ביותר: ארבעה רצים הוזנקו באותו הזמן לתחרות ריצה במסלול מעגלי:

לרץ הראשון לוקח 2 דקות לבצע הקפה, לרץ השני לוקח 3 דקות, לשלישי – 5 דקות, ולרביעי – 6 דקות.

כעבור כמה זמן ייפגשו כל ארבעת הרצים יחד בתחילת המסלול?

להשגת הפתרון יש למצוא את המכפלה המשותפת הקטנה ביותר של המספרים: 6,5,3,2. התשובה הנכונה היא 30 דקות.

תארנים: *ממג"ב, כמק"ב, סימני החלוקה של המספרים, משימות במספרים.*

מילות מפתח: *ממג"ב, כמק"ב, סימני החלוקה של המספרים, משימות במספרים.*

המחשבון המודרני "עוזר" (במגבלות מסוימות, כגון עיגול ספרות) בצמצום שברים, אבל אינו יכול לעזור במציאת המכנה המשותף.

המאמר יתמקד בתכונות העיקריות של הממג"ב והכמק"ב, בקשר ההדוק שביניהם ובשיטות שונות למציאתם.

אחת משתי השיטות העיקריות למציאת ממג"ב וכמק"ב מתבססת על הפירוק של מספרים נתונים – למכפלות של מספרים ראשוניים בעלי מעריכים טבעיים (פירוק לגורמים).

הפירוק לגורמים מחייב שימוש בסימני ההתחלקות של מספר טבעי.

המאמר יעסוק גם בשיטות כלליות ופרטיות למציאת המחלקים של מספר (ראשוניים ולא ראשוניים).

בשל חשיבות הנושא ומאחר שלא קיים בעברית ספר לימוד או העשרה, המקיפים את הנושא באופן שיטתי ומעמיק – אנו מתכוונים במאמרנו להשלים את החסר.

תכונות של ממג"ב וכמק"ב יהיו a ו-b מספרים טבעיים. נסמן ב- $D(a,b)$ את המחלק המשותף הגדול ביותר לשניהם, וב- $K(a,b)$ נסמן את הכפולה המשותפת הקטנה ביותר.

<u>דוגמה:</u>

נתון זוג המספרים (96,36), הממג"ב שלהם הוא 12, והכמק"ב שלהם הוא 288.

<u>הערה:</u>

לפי ההגדרה, $D(a,b)$ מתחלק בכל מחלק משותף של a ו-b, וכל כפולה משותפת שלהם מתחלקת בכמק"ב.

משפט מס' 1

אם b הוא מחלק של a, אז: $D(a,b)=b$ ו-$K(a,b)=a$.

הוכחת המשפט טריביאלית.

משפט מס' 2

מחלק משותף d של מספרים טבעיים a ו-b הוא ממג"ב, אם ורק אם $\frac{a}{d}$ ו- $\frac{b}{d}$ הם מספרים זרים זה לזה.

הוכחה

א. נניח, שנתון $d=D(a,b)$. יש להוכיח, ש- $\frac{a}{d}$ ו- $\frac{b}{d}$ הם מספרים זרים. ההוכחה תיעשה בדרך השלילה:

נניח, ש- $\frac{a}{d}$ ו- $\frac{b}{d}$ אינם מספרים זרים, זאת אומרת שיש להם מחלק משותף m (m – מספר

שלם גדול מ- 1), ואז ניתן לרשום $\frac{a}{d}=m\cdot q_1$ ו- $\frac{b}{d}=m\cdot q_2$, כאשר q_1 ו- q_2 הם מספרים שלמים.

מכאן נובע, ש: $a=(d\cdot m)\cdot q_1$, ו- $b=(d\cdot m)\cdot q_2$, כלומר, $d\cdot m$ הוא מחלק משותף ל-a ו- b, והוא גדול מהממג״ב בסתירה לנתון.

ב. נתון, ש- d הוא מחלק משותף של a ו b, וכן ש- $\frac{a}{d}$ ו- $\frac{b}{d}$ הם מספרים זרים. צריך להוכיח, ש- d הוא הממג״ב ($d=D(a,b)$).

הוכחה

גם כאן תובא הוכחה בדרך השלילה.

נניח, ש- $d<D(a,b)$.

מהעובדה הידועה, שהממג״ב מתחלק בכל משותף אחר של a ו-b, אז קיים, $p>1$ (p – מספר שלם), ולכן $D(a,b)=d\cdot p$.

$\frac{a}{D(a,b)}$ ו- $\frac{b}{D(a,b)}$ הם מספרים שלמים, שניתן לרשום אותם בצורה הבאה:

$$\frac{a}{d\cdot p}=\frac{a}{D(a,b)} \text{ ו- } \frac{b}{d\cdot p}=\frac{b}{D(a,b)}$$

ואז

$a=(d\cdot p)\cdot q_1$ ו- $b=(d\cdot p)\cdot q_2$, כאשר q_1 ו- q_2 הם מספרים שלמים.

רושמים $\frac{a}{d}=p\cdot q_1$ ו- $\frac{b}{d}=p\cdot q_2$

זאת אומרת, ש-$p>1$ הוא המחלק המשותף של $\frac{a}{d}$ ו- $\frac{b}{d}$, בסתירה לכך שהם מספרים זרים.

<u>דוגמה</u>

הממג״ב של הזוג (144,108) הוא 36. המנות $\frac{144}{36}=4$ ו- $\frac{108}{36}=3$ הם מספרים זרים.

משפט מס׳ 3

אם M מספר טבעי, אז $D(a\cdot m,b\cdot m)=D(a,b)\cdot m$

הוכחה

A מתחלק ב- $D(a,b)$.

לכן $a\cdot m$ מתחלק ב- $D(a,b)\cdot m$

B מתחלק ב- $D(a,b)$.

לכן $b\cdot m$ מתחלק ב- $D(a,b)\cdot m$

מכאן נובע, ש- $D(a,b)\cdot m$ הוא מחלק משותף ל- $a\cdot m$ ול- $b\cdot m$.

נשאר להוכיח, שהוא הממג״ב.

כשמתבוננים במספרים: $\frac{a\cdot m}{D(a,b)\cdot m}$ ו- $\frac{b\cdot m}{D(a,b)\cdot m}$ ומצמצמים את השברים ב- m, מקבילים לפי משפט מס׳ 2 שני מספרים זרים. אז המספרים גם לפני הצמצום ב- m היו זרים.

לכן לפי משפט מס׳ 2, $D(a,b)\cdot m$ הוא הממג״ב של $a\cdot m$ ו- $b\cdot m$.

מ.ש.ל.

<u>דוגמה</u>

נתון הזוג (91,52), שהממג״ב שלהם 13. מכפילים את כל אחד מבני הזוג ב-3, ומקבלים את הזוג (273,156), שהממג״ב שלהם הוא 39 ($13\cdot 3$).

משפט מס׳ 4

אם k מחלק משותף של a ו- b, אז $D(\frac{a}{k},\frac{b}{k})=\frac{D(a,b)}{k}$.

הוכחה

היות ו- $a=\frac{a}{k}\cdot k$ ו- $b=\frac{b}{k}\cdot k$, הרי ע״י שימוש במשפט מס׳ 3 מקבלים:

$$D(a,b)=D(\frac{a}{k}\cdot k,\frac{b}{k}\cdot k)=D(\frac{a}{k},\frac{b}{k})\cdot k$$

ע״י העברת אגפים – מקבלים: $D(\frac{a}{k},\frac{b}{k})=\frac{D(a,b)}{k}$.

מ.ש.ל.

<u>דוגמה</u>

נתון הזוג $(720,540)$, והממג״ב שלהם 180. מחלקים את כל אחד מבני הזוג ב-12, ומתקבל הזוג $(60,45)$, שהממג״ב שלהם הוא 15 $(\frac{180}{12}=15)$.

משפט מס׳ 5

אם $D(a,b)$ ו-c מספר טבעי, אז $D(a\cdot c,b)=D(c,b)$.

<u>הערת הקדמה להוכחה:</u>

אם כופלים את אחד מהמספרים a או b במספר c (טבעי), אז $D(a,b)$ נשאר מחלק משותף של $a\cdot c$ ו-b או של a ו- $b\cdot c$, אבל לא בהכרח המחלק הגדול ביותר.

<u>דוגמה</u>

$D(24,18)=6$. מכפילים את בן הזוג 24 ב-3.

$D(24,18)$ נותר מחלק משותף של הזוג $(72,18)$, אף-על-פי ש- $D(72,18)=18$.

הוכחה

(*) לפי הערת ההקדמה, $D(a\cdot c,b)$ מתחלק ב- $D(c,b)$

וכן (**) לפי הערת ההקדמה, $D(a\cdot c,b\cdot c)$ מתחלק ב- $D(a\cdot c,b)$.

לפי משפט מס׳ 3, $D(a\cdot c,b\cdot c)=D(a,b)\cdot c$.

לפי הנתון: $D(a,b)=1$ מקבלים: $D(a\cdot c,b\cdot c)=c$.

כלומר לפי (**), c מתחלק ב- $D(a\cdot c,b)$, אבל גם b מתחלק ב- $D(a\cdot c,b)$, ויחד עם (*) אנו מוכיחים בזה את המשפט.

<u>דוגמה</u>

נתון זוג המספרים הזרים (7,12). מכפילים את בן הזוג השמאלי ב-8, ומתקבל הזוג (56,12). הממג״ב של כל אחד מהזוגות: (56,12) ו-(8,12) שווה ל-4.

משפט מס׳ 6

אם המכפלה של $a\cdot b$ מתחלקת ב-c וגם $D(b,c)=1$, אז a מתחלק ב-c.

הוכחה

היות ונתון, שהמכפלה $a\cdot b$ מתחלקת ב- c, אז לפי משפט מס׳ 1, $D(a\cdot b,c)=c$

לפי משפט מס׳ 5, $D(a\cdot b,c)=D(a,c)$,

לכן, $D(a,c)=c$, זאת אומרת ש- a מתחלק ב-c.

מ.ש.ל.

<u>דוגמה</u>

המספר 756 שהוא כפולה של $84\cdot 9$ מתחלק ב-7, כאשר 7 ו-9 הם מספרים זרים. 84 מתחלק ב-7 בהתאם למשפט.

משפט מס' 7

לכל זוג של מספרים טבעיים a ו-b, מתקיים, $K(a,b)\cdot D(a,b)=a\cdot b$

הוכחה

לפי משפט מס' 2, הביטויים $a_1=\dfrac{a}{D(a,b)}$ ו- $b_1=\dfrac{b}{d(a,b)}$ מייצגים מספרים זרים $(D(a_1,b_1)=1)$.

מסמנים ב-M כפולה משותפת כלשהי של a ו-b.

$M=a\cdot k$, כאשר k מספר שלם.

גם $\dfrac{M}{b}$ מספר שלם, מאחר ש-M הוא כפולה משותפת של a ו-b.

$$\frac{M}{b}=\frac{a\cdot k}{b}=\frac{D(a,b)\cdot a_1\cdot k}{D(a,b)\cdot b_1}=\frac{a_1\cdot k}{b_1}$$

$a_1\cdot k$ מתחלק ב- b_1 וגם $D(a_1,b_1)=1$.

לכן לפי משפט מספר 6, k מתחלק ב- b_1. זאת אומרת, ש- $k=b_1\cdot t$, כאשר t מספר שלם.

מכאן

$$\frac{M}{b}=\frac{a_1\cdot b_1\cdot t_1}{t_1}=a_1\cdot t$$

או

$$M=b\cdot a_1\cdot t=b\cdot\frac{a}{D(a,b)}\cdot t=\frac{a\cdot b}{D(a,b)}\cdot t$$

כדי ש-M תהיה הכפולה המשותפת הקטנה ביותר, חייב להיות $t=1$, ואז $K(a,b)\cdot D(a,b)=a\cdot b$

מ.ש.ל.

מסקנה

אם $D(a,b)=1$ **(דהיינו a ו- b זרים), אז** $K(a,b)=a\cdot b$

<u>דוגמאות:</u>

נתון $d(42,24)=6$ ו- $k(42,24)=168$

ואכן, $K(42,24)\cdot D(42,24)=168\cdot 6=42\cdot 24=1008$

נתון זוג המספרים (3,14).

היות ושני המספרים זרים $(D(3,14)=1)$, הכמק״ב שלהם הוא מכפלתם: $K(3,14)=3\cdot 14=42$.

משפט מס' 8

אם נתון, ש-a מתחלק ב-b ומתחלק גם ב-c, וכן נתון ש-b ו-c זרים $(D(b,c)=1)$, אז a מתחלק במכפלה $b\cdot c$.

הוכחה

לפי הנתון, a כפולה משותפת של b ו-c; אז בוודאי שהוא מתחלק בכפולה המשותפת הקטנה ביותר: היות ונתון ש-b ו-c זרים זה לזה, אז לפי המסקנה של המשפט הקודם (משפט מס' 7), $K(b,c)=b\cdot c$, כלומר, a מתחלק ב- $b\cdot c$.

מ.ש.ל.

<u>דוגמה</u>

המספר 72 מתחלק בשני המספרים הזרים: 4 ו-9, ולכן הוא מתחלק במכפלתם (36).

משפט מס' 9

אם m מספר טבעי, אז $K(a\cdot m,b\cdot m)=K(a,b)\cdot m$

הוכחה

לפי משפט מס' 7, $K(a\cdot m,b\cdot m)\cdot D(a\cdot m,b\cdot m)=(a\cdot m)\cdot(b\cdot m)$

$$K(a\cdot m,b\cdot m)=\frac{(a\cdot m)\cdot(b\cdot m)}{D(a\cdot m,b\cdot m)}$$

ע״י שימוש במשפט מס' 3 מקבלים:

$$K(a\cdot m,b\cdot m)=\frac{(a\cdot m)\cdot(b\cdot m)}{D(a,b)\cdot m}=\frac{(a\cdot b)\cdot m}{D(a,b)}$$

ע"י שימוש חוזר במשפט מס' 7 מקבלים:

$$K(a\cdot m,b\cdot m)=\frac{K(a,b)\cdot D(a,b)\cdot m}{D(a,b)}=k(a,b)\cdot m$$

מ.ש.ל.

<u>דוגמה</u>

נתון הזוג (4,10), שהכמק"ב שלהם הוא 20. מכפילים את כל אחד מבני הזוג ב-7, ומתקבל הזוג (28,70), שהכמק"ב שלהם 140 $(7\cdot 20)$.

משפט מס' 10

אם k הוא מחלק משותף של המספרים a ו-b, אז $K(\frac{a}{k},\frac{b}{k})=\frac{K(a,b)}{k}$.

הוכחה

לפי משפט מס' 9, $K(a,b)=K(\frac{a}{k}\cdot k,\frac{b}{k}\cdot k)=K(\frac{a}{k},\frac{b}{k})\cdot k$.

שינוי אגפים נותן: $K(\frac{a}{k},\frac{b}{k})=\frac{K(a,b)}{k}$

מ.ש.ל.

<u>דוגמה</u>

נתון הזוג (72,120), שהכמק"ב שלהם 360. מחלקים את כל אחד מבני הזוג ב-6, ומתקבל הזוג (12,20), שהכמק"ב שלהם $60(\frac{360}{6})$.

האלגוריתם של אוקלידס למציאת $D(a,b)$

תחילה יש להוכיח משפט עזר (משפט למה).

משפט למה

אם מספר a אינו מתחלק במספר b, אז קבוצת המחלקים המשותפים ל-a ול-b מתלכדת עם קבוצת המחלקים המשותפים ל-b ול-r, כאשר r הוא השארית המתקבלת מחילוק של a ב-b.

הוכחה

לפי המשפט היסודי של האריתמטיקה לשני מספרים טבעיים a ו-b, קיימים 2 מספרים טבעיים q ו-r, באופן ש-$a = b \cdot q + r$ ‏(b>r). אם d_1 הוא מחלק משותף של a ושל b, אז גם $r = a - b \cdot q$ מתחלק ב-d_1, כלומר, d_1 הוא מחלק משותף של b ו-r.

אם d_2 הוא מחלק משותף של b ושל r, אז גם a מתחלק ב-d_2, כלומר, d_2 הוא גם המחלק המשותף של a ושל b.

מ.ש.ל.

<u>דוגמה</u>

נתונים $a = 42$ ו- $b = 24$. המחלקים המשותפים שלהם הם: 2,3,6 . $r = 18$ היא השארית של חלוקת a ב- b. המחלקים המשותפים ל-b ול-r הם: 2,3,6.

ההליך למציאת $D(a,b)$

אם a מתחלק ב-r, הרי לפי משפט מס' 1, $D(a,b) = b$ ונמצא הממג"ב.

אם a אינו מתחלק ב-b, אז קיימים 2 מספרים שלמים: $q_1 \geq 0$ ו- r_1 באופן שמתקיים $a = b \cdot q_1 + r_1$, כאשר $0 < r_1 < b$.

לפי משפט העזר, די למצוא את הממג"ב של b ו- r_1.

אם b מתחלק ב- r_1, אז $D(a,b) = D(b,r_1) = r_1$, ונמצא הממג"ב המבוקש.

אם b אינו מתחלק ב- r_1, אז קיימים שני מספרים שלמים (אי-שליליים) q_2 ו- r_2 באופן שמתקיים $b = r_1 \cdot q_2 + r_2$, כאשר $o < r_2 < r_1$.

לפי משפט העזר, $D(a,b) = D(b,r_1) = D(r_1,r_2)$

באותו אופן ממשיכים.

היות ו- $b_1 > r_1 > r_2$, הרי שההליך סופי, ולאחר n שלבים נמצא, ש- r_{n-1} מתחלק ב- r_n (במקרה הקיצוני, כאשר המספרים a ו-b זרים, מקבלים, ש- $r_n = 1$), ואז
$$D(a,b) = D(b,r_1) = D(r_1,r_2) = ... = D(r_{n-1},r_n) = r_n$$

מסקנה

$D(a,b)$ – הוא השארית האחרונה, השונה מ-0 בהליך המתואר.

להליך קוראים בשם **האלגוריתם של אוקלידס.**

<u>דוגמאות</u>

מצא את המחלק המשותף הגדול ביותר של זוגות המספרים : (1725,525)

ו-(793,246).

$$1725 = 3 \times 525 + 150$$
$$525 = 3 \times 150 + 75$$
$$150 = 2 \times 75 + 0$$

מכאן, $D(1725,525) = 75$

$$793 = 3 \times 246 + 55$$
$$246 = 4 \times 55 + 26$$
$$55 = 2 \times 26 + 3$$
$$26 = 8 \times 3 + 2$$
$$3 = 1 \times 2 + 1$$
$$2 = 2 \times 1 + 0$$

<u>מכאן</u>

$$D(793,264) = 1$$

כלומר, המספרים זרים.

משפט מס' 11

לכל זוג מספרים שלמים a ו-b אפשר למצוא שני מספרים שלמים : k ו-l, באופן שיתקיים :

$$D(a,b) = k \cdot a + l \cdot b$$

הוכחה

לפי האלגוריתם של אוקלידס, $a = b \cdot q_1 + r_1 => r_1 = \underline{1} \cdot a + \underline{(-q_1)} \cdot b$

אם b מתחלק ב- r_1,

אז $D(a,b) = r_1$, $k = 1$ ו- $b = -q_1$

אם b אינו מתחלק ב- r_1,

אז $r_2 = b - r_1 - q_2 = b - (a - b \cdot q) \cdot q_2 = \underline{(-q_2)} \cdot a + \underline{(1 + q_1 \cdot q_2)} \cdot b$

אם r_1 מתחלק ב- r_2,

אז $D(a,b) = r_2$, $k = -q_2$ ו- $l = 1 + q_1 \cdot q_2$.

אם r_1 אינו מתחלק ב- r_2,

ממשיכים באותו אופן, עד אשר מגיעים לשארית האחרונה, השווה ל- $D(a,b)$.

מ.ש.ל.

<u>דוגמה</u>

$D(30,18) = 6 = \underline{5}\cdot 30 - 8\cdot 18$.

במקרה זה $k = 5$ ו- $b = -8$.

<u>הערה</u>

באלגוריתם של אוקלידס משתמשים לפתרון משוואות דיופנטיות.

הליך למציאת המכפלה המשותפת הקטנה ביותר

כשמוצאים את הממג"ב ע"י ההליך שתואר, ניתן למצוא בקלות את הכמק"ב ע"י שימוש במשפט מס' 7

$$K(a,b) = \frac{a\cdot b}{D(a,b)}$$

<u>דוגמאות</u>

$$D(1725,525) = 75 \Rightarrow K(1725,525) = \frac{1725\cdot 525}{75} = 12{,}075$$

$$D(793,246) = 1 \Rightarrow K(793,246) = \frac{793\cdot 246}{1} = 195{,}078$$

פירוק לגורמים – כגישה שנייה למציאת ממג"ב וכמק"ב

לפי המשפט היסודי של האריתמטיקה, כל מספר טבעי ניתן להצגה כמכפלה סופית של מספרים ראשוניים. ההצגה של מספר a היא יחידה עד כדי סדר גורמי – המכפלה.

$a = p_1^{\alpha 1}\cdot p_2^{\alpha 2}\cdot p_3^{\alpha 3}....p_n^{\alpha n}$, כאשר: $p_1, p_2, p_3,....p_n$ – מספרים ראשוניים.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...\alpha_n$ - מספרים שלמים בלתי-שליליים.

קל להראות, שהממג"ב של שניים או יותר מספרים טבעיים הוא המכפלה של המספרים הראשוניים <u>המשותפים</u> עם המעריכים הקטנים בין כל הפירוקים.

הכמק"ב הוא מכפלת המספרים הראשוניים במעריכים הגדולים בין כל הפירוקים.

יתרון השיטה מתבטא בעובדה, שלאחר פירוק כל מספר למכפלה של מספרים ראשוניים – ניתן למצוא בעת ובעונה אחת ממג"ב וכמק"ב של יותר משני מספרים טבעיים.

<u>דוגמאות:</u>

1. נתון הזוג (12,7). נרשום את המספרים כמכפלה של מספרים ראשוניים: $12 = 2^2\cdot 3^1$ ו- $7 = 7^1$. אין למספרים גורם משותף. לכן הכמק"ב הוא $7\cdot 12 = 84$. שני המספרים זרים,

ולכן הממג"ב הוא 1.

2. נתון הזוג (90,24). נרשום את המספרים כמכפלה של מספרים ראשוניים: $90 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1$ ו- $24 = 2^3 \cdot 3^1$. המספרים הראשוניים עם מעריכיהם הגדולים ביותר הם: $2^3, 3^2, 5^1$. לכן, הכמק"ב הוא $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 360$. המספרים הראשוניים המשותפים בעלי המעריכים הקטנים ביותר הם: $2^1, 3^1$. לכן, הממג"ב הוא $2^1 \cdot 3^1 = 6$

3. נתונים המספרים (196,150,55,48). נרשום את המספרים כמכפלה של מספרים ראשוניים:
$196 = 2^2 \cdot 7^2$, $150 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^2$, $55 = 5^1 \cdot 11^1$, $48 = 2^4 \cdot 3^1$.

הכמק"ב הוא $2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^2 \cdot 11^2 = 646{,}800$

מאחר שלכל ארבעת המספרים אין גורם משותף, הרי שהממג"ב הוא 1.

<u>הערה</u>

כשיש למצוא כפולה משותפת קטנה ביותר של מספרים קטנים, ניתן לקבל אותה בקלות ע"י בניית סדרת חשבוניות (שהפרשן שווה לאיבר הראשון) ומציאת המספר הקטן ביותר המשותף להן.

<u>דוגמה</u>

מצא את הכמק"ב של קבוצת המספרים :(5,6,10,12,15)

הסדרות החשבוניות:

5,10,15,20,25,30,35,40,45,50,55,60,65,70,75...

6,12,18,24,30,36,42,48,54,60,66,72,78...

10,20,30,40,50,60,70,80...

12,24,36,48,60,72,84...

15,30,45,60,75...

הקמכ"ב הוא המספר 60, המשותף לכל הסדרות.

סימני החלוקה – הרחבת הכללים: דוגמאות ותרגילים.

סימני החלוקה הפשוטים מוכרים לתלמידים כבר מביה"ס היסודי. ידיעתם מאפשרת פישוט שברים, בניית מכנה משותף, הוכחת קשרים בין ביטויים, הבנויים ממספרים טבעיים. הכללים יפורטו מחדש, אך יורחבו גם למספרים גדולים יותר, מספרים, שמורים אומרים בדרך כלל לתלמידיהם, וזאת – במקרה הטוב, שהכלל מסובך או שאין כלל סימנים – דבר שאינו נכון.

בעבודתו של המתמטיקאי והפיזיקאי הדגול **פסקל *(Pascal)***, בן המאה ה-17, בנושא: "תכונות אופייניות להתחלקות מספרים" – מופיעה הבעיה הבאה:

"מצא סימן התחלקות כללי למספר כלשהו".

פסקל עצמו פתר אותה בעזרת השיקולים הבאים: נתון מספר ארבע ספרתי כלשהו a. ערכו נרשם בעזרת ספרותיו:

$$a=\overline{ABCD}=1000A+100B+10C+D \quad ***$$

נבדוק, אם המספר a מתחלק במספר חד-ספרתי b.

נסמן ב- r_1 את שארית החלוקה של 10 ב-b, ב- r_2 את שארית החלוקה של $10r_1$ ב-b, וב- r_3 את שארית החלוקה של $10r_2$ ב-b.

משפט מס' 12

אם הביטוי $D+Cr_1+Br_2+Ar_3$ מתחלק ב-b, אז a מתחלק ב-b, ולהפך.

הוכחה

לפי הסימון:

$$10=b\cdot q_1+r_1$$
$$10r_1=b\cdot q_2+r_2$$
$$10r_2=b\cdot q_3+r_3$$

הרי הצבת ביטויים אלו להוכחת משפט 12 היא כדלקמן:

$$D+Cr_1+Br_2+Ar_3=D+C\cdot(10-b\cdot q_1)+B\cdot(10r_1-b\cdot q_2)+$$
$$+A\cdot(10r_2-b\cdot q_3)=D+10C+10Br_1+10Ar_2-b\cdot(C\cdot q_1+B\cdot q_2+A\cdot q_3)=$$
$$=D+10C+10B\cdot(10-b\cdot q_1)+10A\cdot(10r_1-b\cdot q_2)-b\cdot(C\cdot q_1+B\cdot q_2+A\cdot q_{3)=}$$
$$=D+10C+100B+100A\cdot(10-b\cdot q_1)-b\cdot(C\cdot q_1+B\cdot q_2+A\cdot q_3+10B\cdot q_1+10A\cdot q_2)=$$
$$=D+10C+100B+1000A-b\cdot\frac{(C\cdot q_1+B\cdot q_2+A\cdot q_3+10B\cdot q_1+10A\cdot q_2+100A\cdot q_1)}{K}=$$
$$=a-b\cdot K$$

מכאן $a=b\cdot K+D+C\cdot r_1+Br_2+Ar_3$

הביטוי הראשון מתחלק ב- b, משום שהוא כפולה שלו. לכן חלוקת a ב-b תלויה בכך שהביטוי $D+C\cdot r_1+B\cdot r_2+A\cdot r_3$ יתחלק ב-b.

מ.ש.ל.

<u>דוגמאות:</u>

1. האם המספר 3,248 מתחלק ב-7?

במקרה זה $r_1 = 3$, $r_2 = 2$ ו- $r_3 = 6$

חישוב ערך הביטוי

$$D + C \cdot r_2 + B \cdot r_2 + A \cdot r_3 = 8 + 12 + 4 + 18 = 42$$

היות והסכום מתחלק ב- 7, הרי המספר 3,248 מתחלק ב-7 .

2. האם המספר 3,674 מתחלק ב-8?

במקרה זה $r_1 = 2$, $r_2 = 4$, $r_3 = 0$

$$D + C \cdot r_2 + B \cdot r_2 + A \cdot r_3 = 4 + 14 + 24 + 0 + 42$$

היות ו- 42 אינו מתחלק ב- 8, גם המספר 3,674 אינו מתחלק ב-8.

<u>הערות</u>

אפשר להרחיב את המשפט לכל מספר סופי של ספרות. המשפט נכון גם לגבי b רב-ספרתי, ואז $r_1 = 10$ וכו'.

יתרונו של המשפט – בכלליות שלו, אך חסרונו – באי-נוחות השימוש. חשוב מאוד להדגיש, שיש ערך לסימני ההתחלקות רק אם הם נוחים ופשוטים.

עיקרון נוסף של סימני ההתחלקות מבוסס על הצגת מספר בצורה (***) וכן על שימוש במשפט מס' 8.

להלן פירוט סימני החלוקה מהמספר 2 ועד (כולל) המספר 25.

סימני ההתחלקות ב-2, ב-5 וב-10

מספר מתחלק ב-2 או ב-5 או ב-10, אם ורק אם ספרת האחדות שלו מתחלקת ב-2 או ב-5 או ב-10 בהתאמה.

הוכחה

נתון המספר a באמצעות n ספרותיו, $a = \overline{A_n A_{n-1} ....A_3 A_2 A_1} = (\overline{A_n A_{n-1} ......A_3 A_2}) \cdot 10 + A_1$

החלק הראשון של המספר $\overline{A_n A_{n-1} .....A_2} \cdot 10$ מתחלק ב-2, ב-5 וב-10.

לכן המספר a מתחלק במספרים הנ"ל, אם ורק A_1 (ספרת האחדות) מתחלק ב-2 או ב-5 או ב-10 בהתאמה.

<u>דוגמאות:</u>

1. מספרים שמתחלקים ב-2: 3,054, 340, 126, 18
2. מספרים שמתחלקים ב-5: 020, 4, 245, 90, 15
3. מספרים שמתחלקים ב-10: 570, 240, 180, 30

<u>הערות</u>

את סימני החלוקה של המספרים הנ"ל נהוג לנסח בצורה שונה במעט:

חלוקה ב-2, כאשר ספרת האחדות של המספר היא זוגית.

חלוקה ב-5, כאשר ספרת האחדות שלו היא 0 או 5.

חלוקה ב-10, כאשר ספרת האחדות שלו היא 0.

השימוש במשפט מס׳ 12 להוכחת סימן ההתחלקות – נותן: $r_1 = r_2 = r_3 = ... = 0$, ולכן מספר מתחלק במספרים הנ״ל, אם ורק אם ספרת האחדות שלו מתחלקת בהם.

סימני ההתחלקות ב-4, ב-20, וב-25

מספר מתחלק ב-4, או ב-20, או ב-25, אם ורק אם המספר, המורכב משתי ספרותיו הימניות, מתחלק ב-4, ב-20 או ב-25 בהתאמה.

הוכחה

סימון המספר a ייעשה, כפי שנעשה בקבוצת המספרים הקודמת:

$$a = \overline{A_n A_{n-1} ....A_3 A_2 A_1} = \overline{A_n A_{n-1} ......A_3} \cdot 100 + \overline{A_2 A_1}$$

החלק הראשון של המספר מתחלק בכל אחד מהמספרים :25,20,4 בגלל הגורם המכפיל: 100, ולכן כל המספר יתחלק, אם ורק אם החלק מהמספר $\overline{A_2 A_1}$ מתחלק ב-4 או ב-20 או ב-25 בהתאמה.

<u>דוגמאות:</u>

1. מספרים שמתחלקים ב-4: 48, 164, 2, 156
2. מספרים שמתחלקים ב-20: 80, 260, 1,440
3. מספרים שמתחלקים ב-25: 75, 350, 2,625

<u>הערות</u>

לפי משפט מס׳ 12, עבור המספרים 20 ו-25 מקבלים:

$$r_1 = 10 \ , \ r_2 = r_3 = ... = 0 .$$

לכן מספר מתחלק ב-20 או ב-25, אם ורק אם $10A_2 + A_1$ מתחלק, דבר הזהה לסימן המוכר.

לגבי החלוקה ב-4 – משפט מס׳ 12 מניב סימן התחלקות נוסף:

במקרה זה $r_1 = 2$, $r_2 = r_3 = ...0$. לכן מספר מתחלק ב-4, אם ורק אם הסכום של ספרת האחדות עם כפליים ספרת העשרות – מתחלק ב-4.

<u>דוגמאות</u>

במספר 2,596, הסכום הוא $9 \cdot 2 + 6 = 24$, ולכן המספר מתחלק ב-4. במספר 550, הסכום הוא $5 \cdot 2 + 0 = 10$, ועל-כן הוא אינו מתחלק ב-4.

סימני התחלקות ב-8 (וב-125)

מספר מתחלק ב-8 או ב-125, אם ורק אם המספר המורכב משלוש הספרות הימניות שלו, מתחלק ב-8 או ב-125.

הוכחה

$$a = \overline{A_n A_{n-1} .....A_4 A_3 A_2 A_1} = \overline{A_n A_{n-1} ......A_4} \cdot 1000 + \overline{A_3 A_2 A_1}$$

החלק הראשון של המספר מתחלק ב-8 וגם ב-125.

לכן המספר a יתחלק ב-8 (או ב-125), אם ורק אם החלק השני של המספר, $\overline{A_3 A_2 A_1}$ מתחלק בהם.

דוגמאות:

1. מספרים שמתחלקים ב-8: 14,616, 2,592
2. מספרים שמתחלקים ב-125: *39,625* , *875*

הערות:

1. השימוש בכלל זה מחייב לבדוק, אם המספר התלת-ספרתי מתחלק ב-8.משום כך, עדיף להפריד כל מספר לשלושה חלקים:
   חלק ראשון בעל יחידות שלמות של 200 (חלק, שתמיד מתחלק ב-8), את היתרה – להפריד לחלק שני בעל יחידות של 40 (חלק, שתמיד מתחלק ב-8), וחלק שלישי (יתרת שני החלקים הראשונים). נותר לבדוק, אם החלק השלישי (הקטן מ-40) מתחלק ב-8.

דוגמאות:

א. המספר 752 מתחלק ב-8, כי הוא מורכב מ- 32+120+600.

ב. המספר 1,296 מתחלק ב-8, כי המספר 296 מורכב מ-16+80+200.

ג. המספר 7,378 אינו מתחלק ב-8, כי המספר 378 מורכב מ- 18+160+200, והחלק השלישי אינו מתחלק ב-8.

2. שימוש במשפט מס׳ 12 לשם חלוקה ב-8 מניב סימן התחלקות נוסף. עבור מספר תלת-ספרתי (החלק הימני של המספר) $r_1 = 2$, $r_4 = 4$.לכן מספר מתחלק ב-8, כאשר הסכום $4A_3 + 2A_2 + A_1$ מתחלק ב-8.

   דוגמאות:

   א. במספר 152 – הסכום הוא, $4 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 2 = 16$, ולכן הוא מתחלק ב- 8.

   ב. במספר 1272 – הסכום הוא, $4 \cdot 2 + 2 \cdot 7 + 2 = 24$, ולכן גם הוא מתחלק ב-8.

סימני ההתחלקות ב-3 וב-9

מספר מתחלק ב-3 או ב-9, אם ורק אם סכום ספרותיו מתחלק ב-3 או ב-9 בהתאמה.

הוכחה

<u>דרך א'</u>

$$a = \overline{ABCD} = 1000A + 100B + 10C + D =$$
$$(999+1)\cdot A + (99+1)\cdot B + (9+1)\cdot C +$$
$$D = (999A + 99B + 9C) + A + B + C + D$$

החלק הראשון שבסוגריים מתחלק ב-9 (וגם ב-3). לכן ההתחלקות ב-3 או ב-9 תלויה בהתחלקות סכום הספרות $A+B+C+D$

<u>דרך ב'</u>

לפי משפט מס' 12, הרי שאם $a = \overline{ABCD}$, ו- $b = 3$ או $b = 9$, אז $r_1 = r_2 = r_3 = ... = 1$. לכן a מתחלק ב-3 או ב-9, אם ורק אם $A+B+C+D$ מתחלק בו.

<u>דוגמאות</u>:

1. המספרים הבאים מתחלקים ב-3: 75, 132, 136, 5.
2. המספרים הבאים מתחלקים ב-9: 161, 477, 402, 3

<u>הערה מס' 1</u>:

ההוכחות הנ"ל נכונות לגבי כל מספר סופי של ספרות.

<u>הערה מס' 2</u>:

דרך נוספת היא לחבר את סכום ספרותיו של מספר ולהמשיך לחבר את הספרות של הסכום. אם המספר המקורי מתחלק ב- 9, אז גם הסכום הסופי חייב להיות 9.

<u>דוגמאות</u>:

1. המספר 178,416 מתחלק ב-9, כי:
$$1+7+8+4+1+6 = 27 \Rightarrow 2+7 = 9$$
2. המספר 29,854 אינו מתחלק ב-9, כי:
$$2+9+8+5+4 = 28 \Rightarrow 2+8 = 10 \neq 9$$

סימני ההתחלקות ב- *18,15,12,6* ו- 24

סימני ההתחלקות של המספרים הנ"ל מתבססים על משפט מס' 8.

סימני ההתחלקות ב-6

כל מספר, המתחלק ב-2 וגם ב-3, מתחלק ב-6.(שים-לב, המספרים 2 ו-3 הם מספרים זרים).

<u>דוגמאות</u>:

762, 182, 4, 324 ,66

סימני התחלקות ב-12

כל מספר, המתחלק ב- 3 וגם ב- 4, מתחלק ב-12.

דוגמאות: 5,796, 264, 84

סימני התחלקות ב-15

כל מספר, שמתחלק ב-3 וספרת האחדות שלו היא אפס או 5, מתחלק ב-15.

דוגמאות: 5,220, 765, 210

סימני התחלקות ב-18

כל מספר זוגי המתחלק ב-9 יתחלק ב-18.

דוגמאות: 7,965,486

סימני התחלקות ב-24

כל מספר, המתחלק ב-3 וגם ב-8, יתחלק ב-24.

דוגמאות: 4,536, 744

חלוקה ב-7

כדי לבדוק, אם מספר מתחלק ב-7, נכפול את ספרת האחדות שלו ב-2, ונחסיר את התוצאה מיתרת המספר (ללא ספרת האחדות). באותו אופן נמשיך, עד אשר נקבל שארית קטנה. אם השארית שווה לאפס או אם היא כפולה של 7, אז המספר יתחלק ב-7.

דוגמאות:

1.

120,519
- 18

12,033
- 6

1197
- 14

105
- 10

0

השארית 0.
לכן המספר מתחלק ב-7.

2.

6,195
- 10

609
- 18

42

השארית 42. לכן המספר מתחלק ב-7.

3.

31,584
- 8

3,150
- 0

315
- 10

21

השארית 21.

לכן המספר מתחלק ב-7.

הוכחה

בלי לפגום בכלליות ההוכחה – די להסביר את ההליך באמצעות מספר תלת-ספרתי:

$$a = \overline{ABC} = 100A + 10B + C$$

הפעולה הראשונה באלגוריתם מורידה מהמספר $10 \cdot 2C + C = 21C$.

המספר שמורידים מתחלק ב-7, ולכן בדיקת ההתחלקות נותרה על מספר יותר קטן, המסתיים ב-0.

בעקיפין מדובר בפעולה של חלוקה ב-10. היות והמספרים 10 ו-7 הם מספרים זרים, חילוק של תוצאה ב-10 אינה משפיעה על התחלקות ב-7.

בדוגמה מס׳ 1 אפשר לפרט את המעבר מהמספר 120,519 למספר 12,033 באופן הבא:
$(120{,}519-189):10=12{,}033$, וכך בהמשך ההליך.

<u>הערה</u>:

שימוש בסימן התחלקות כללי – מופיע בדוגמה מס׳ 1 שלאחר משפט מס׳ 12.

חלוקה ב-11

<u>דרך א׳</u>:

1. כל מספר דו-ספרתי, ששתי ספרותיו זהות, מתחלק ב-11.
   דוגמאות:
   99, 55, 22.

2. כל מספר תלת-ספרתי, שההפרש בין סכום ספרת האחדות וספרת המאות שלו – לבין ספרת העשרות שלו הוא 0 או 11, מתחלק ב-11.
   דוגמאות:
   374, 583, 814

3. כל מספר ארבע - ספרתי, שההפרש בין סכום ספרת האחדות וספרת המאות שלו לבין סכום ספרת העשרות וספרת האלפים שלו הוא 0 או 11, מתחלק ב-11.
   דוגמאות:
   2,937 , 3,685 , 7,139

דרך ב׳:

את ספרת האחדות מחסרים משאר המספר (בלי ספרת האחדות) וממשיכים כך הלאה.

אם התוצאה היא מספר בעל ספרות זהות, אז המספר מתחלק ב-11.

דוגמאות:

1.
53 9
\- 9
44

2.
18,87 6
\- 6
1,88 1
\- 1
18 7
\- 7
11

3.
347,07 2
\- 2
34,70 5
\- 5
3,46 5
\- 5
34 1
\- 1
33

בכל אחת מהדוגמאות התקבל בסוף מספר דו-ספרתי בעל ספרות זהות.

הוכחה

עבור מספר *a*, $a=\overline{ABC}=100A+10B+C$, הורד בהליך הערך $10C+C=11C$, ובהמשך – התוצאה חולקה ב-10. הורדת כפולה של 11 אינה משפיעה על ההתחלקות של המספר הנתון. גם החילוק ב-10 אינו משפיע, כי המספרים 10 ו- 11 הם מספרים זרים.

<u>הערה</u>:

ניתן לקבל שימוש יעיל במשפט מס׳ 12, כאשר מאפשרים לשאריות להיות מספרים שליליים. במקרה כזה מקבלים סימן חלוקה נוסף למספר 11.

אם קובעים $r_1=-1$ $(10-11=-1)$, אז מקבלים $r_2=1$ $(-10+11=1)$ ו-$r_3=-1$ וכך הלאה. מספר $\overline{ABCD}$ מתחלק ב-11, אם ורק אם $A-B+C-D$ מתחלק ב-11.

עם הרחבת התכונה למספר רב – ספרתי, מקבלים את סימן ההתחלקות ב-11 כדלקמן:

מספר מתחלק ב-11, אם ורק אם ההפרש בין סכום הספרות שבמקומות האי-זוגיים לסכום הספרות שבמקומות הזוגיים – מתחלק ב-11.

דוגמאות:

1. במספר 18,876 ההפרש הוא: $0=(7+8)-(6+8+1)$.
2. במספר 347,072 ההפרש הוא: $11=(2+0+4)-(7+7+3)$.

חלוקה ב-13

נכפיל את ספרת האחדות מכפילים ב-4 ונחבר את תוצאת המכפלה לשאר המספר. אם נקבל מספר, שהוא כפולה של 13, המספר המקורי מתחלק ב-13.

דוגמאות:

1.
$$\begin{array}{r} 28\,⑥ \\ +\;24 \\ \hline 5\,② \\ +\;8 \\ \hline 13 \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{r} 1{,}27\,④ \\ +\;16 \\ \hline 14\,③ \\ +\;12 \\ \hline 26 \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{r} 53{,}35\,② \\ +\;8 \\ \hline 5{,}34\,③ \\ +\;12 \\ \hline 54\,⑥ \\ +\;24 \\ \hline 7\,⑧ \\ +\;32 \\ \hline 39 \end{array}$$

בכל הדוגמאות התקבלת כפולה של 13. לכן המספר מתחלק ב- 13.

הוכחה

מהמספר הנתון: $a=ABC=100A+10B+C$ מורידים *C*, אך מוסיפים $10\cdot 4C$, כלומר, מוסיפים *39C*, כפולה של 13, ואת התוצאה מחלקים ב-13.

שתי הפעולות לא משפיעות על ההתחלקות ב-13, זאת אומרת שהמספר הנתון והתוצאה של ההליך שניהם מתחלקים או אינם מתחלקים ב-13.

חלוקה ב-17

את ספרת האחדות מכפילים ב-5. את התוצאה מחסרים מיתרת המספר (ללא ספרת האחדות). אם מקבלים תוצאה 0 או כפולה של 17, המספר מתחלק ב-17.

דוגמה:

$$\begin{array}{r} 51{,}238 \\ -\quad 40 \\ \hline 5{,}083 \\ -\quad 15 \\ \hline 493 \\ -\quad 15 \\ \hline 34 \end{array}$$

המספר 34 הוא כפולה של 17, ולכן המספר מתחלק ב-17.

הוכחה

מהמספר הנתון: $a=\overline{ABC}=100A+10B+C$ מורידים $10\cdot 5C+C=51C$, זאת אומרת, מורידים כפולה של 17, ואת התוצאה מחלקים ב-10. שתי הפעולות אינן משפיעות על ההתחלקות ב-17.

דוגמה:

$$(51{,}238-51\cdot 8):10=5{,}083$$

חלוקה ב-19

את ספרת האחדות נכפול ב-2, ונוסיף את התוצאה ליתרת המספר (ללא ספרת האחדות). אם המספר המתקבל הוא 19 או כפולה של 19, המספר מתחלק ב-19.

דוגמאות:

1.
$$\begin{array}{r} 798 \\ +\quad 16 \\ \hline 95 \\ +\quad 10 \\ \hline 19 \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{r} 33{,}972 \\ +\quad 4 \\ \hline 3{,}401 \\ +\quad 2 \\ \hline 342 \\ +\quad 4 \\ \hline 38 \\ +\quad 16 \\ \hline 19 \end{array}$$

בשתי הדוגמאות המספר שמתקבל הוא 19, ולכן המספרים מתחלקים ב-19.

חלוקה ב-23

את ספרת האחדות נכפול ב-7, ונוסיף את התוצאה ליתרת המספר (ללא ספרת האחדות). אם המספר המתקבל הוא 23 או כפולה של 23, המספר מתחלק ב-23.

דוגמאות:

1.
```
  64(4)
+ 28
  9(2)
+ 14
  23
```

2.
```
  384,46(8)
+ 56
  38,50(2)
+ 142
  386(4)
+ 28
  41(4)
+ 28
  69
```

בשתי הדוגמאות התקבלה כפולה של 23, ולכן המספרים מתחלקים ב-23.

סימני החלוקה של המספרים: 22,21,14 ו-16

חלוקה ב-14

כל מספר זוגי המתחלק ב-7 מתחלק ב-14.

<u>דוגמאות:</u> 3,612,238

חלוקה ב-21

כל מספר, המתחלק ב-3 וגם ב-7, מתחלק ב-21.

<u>דוגמאות:</u>

26,499,2,436,714

חלוקה ב-22

כל מספר זוגי המתחלק ב-11 מתחלק ב-22.

<u>דוגמאות:</u>

924, 5,346, 31,768

חלוקה ב-16

נפצל את המספר לשלושה חלקים:

חלק ראשון בעל יחידות שלמות של 400. את היתרה מפרידים לשני חלקים:

הראשון – בעל יחידות שלמות של 80 (מספר המתחלק ב-16), והשאר הוא החלק השלישי. נותר לבדוק, אם החלק השלישי (הקטן מ-80) מתחלק ב-16.

<u>דוגמאות:</u>

1. המספר 1,392 מתחלק ב-16, כי הוא מורכב מ- 1,200+160+32

2. המספר 3,888 מתחלק ב-16, כי הוא מורכב מ- 3,600+240+48

<u>הערה:</u>

ע"י שימוש במשפט מס' 12 – נקבל סימן נוסף להתחלקות ב-16:

אם $a=\overline{ABCD}$ הוא המספר, אז $r_1=10$, $r_2=4$, $r_3=8$ ו- $r_4=.....=0$. לכן המספר מתחלק ב-16, אם ורק אם $8A+4B+10C+D$ מתחלק בו, או רישום דומה, $8A+4B+\overline{CD}$.

<u>דוגמה:</u>

לגבי המספר 1,392 יש לבדוק, אם $8+12+92=112$ מתחלק ב-16. אפשר גם להמשיך לפי אותו אלגוריתם ביחס למספר 112 בעזרת המספר $4\cdot1+12=16$.

סימן חלוקה משותף למספרים: 13,11,7 (שלושה מספרים ראשוניים עוקבים)

בגלל העובדה, ש- $7\cdot11\cdot13=1{,}001$, הרי אם נכפול מספר תלת-ספרתי $\overline{ABC}$ ב-1,001 נקבל המספר השש-ספרתי $\overline{ABCABC}$.

לכן כל המספרים מהצורה $\overline{ABCABC}$ מתחלקים גם ב-7 גם ב-11 וגם ב-13, ובמיוחד –המספר: $1{,}000{,}000-1=999{,}999$. תכונה זו מאפשרת החלפת מספר רב-ספרתי במספר שאינו גדול מתלת-ספרתי ומאפשרת בדיקת התחלקותו ב-7 או ב-11 או ב-13.

להדגמת ההליך משתמשים בדוגמה הבאה:

$$42{,}623{,}295=42\cdot1{,}000{,}000+623\cdot100+295=$$
$$=42\cdot(999{,}999+1)+623\cdot(1000-1)+295=$$
$$=(42\cdot999{,}999+623\cdot1001)+(42+295-623)$$

במספר השמונה-ספרתי שהוצג – החלק, שמופיע בסוגריים הראשונים, מתחלק ב-7, ב-11 וב- 13, ולכן ההתחלקות של המספר בכל אחד מהמספרים תלויה רק במספרים שבסוגריים הימניים.

מסקנה:

לקביעת ההתחלקות של מספר רב-ספרתי במספרים: 13,11,7 יש לפרקו מימין לשמאל לשלישיות (בקצה השמאלי יכול להיות מספר בעל פחות משלוש ספרות). אם ההפרש בין סכום השלישיות שבמקומות האי-זוגיים לבין סכום השלישיות שבמקומות הזוגיים מתחלק ב-7 או ב-11 או ב-13, אז גם כל המספר מתחלק בכל אחד מהם.

בדוגמה הנ"ל ערך המספר שבסוגריים הימניים שווה ל-286. המספר 286 מתחלק ב-11 וב-13, אך אינו מתחלק ב-7. לכן גם המספר המקורי מתחלק ב-11 וב-13, אך אינו מתחלק ב-7.

מפלאי ההתחלקות!

נתונים ארבעת המספרים הבאים:

4,753,869,120   2,438,195,760

4,876,391,520   3,785,942,160

ארבעת המספרים הללו הם בני עשר ספרות, כל הספרות מ-0 ועד 9, כשכל ספרה מופיעה פעם אחת. אפשר לבדוק אם כל אחד מארבעת המספרים מתחלק בכל אחד מהמספרים מ-2 ועד 18 (כולל)!

משימות ותרגילים להוכחה או לפתרון באופן עצמאי

1. הוכח:

   א. $D(a,b,c) = D(D(a,b),c)$

   ב. $K(a,b,c) = K(K(a,b),c)$

2. הוכח, שעבור כל n טבעי מתקיים: $D(n,n+1,n+2)=1$

3. הוכח, שעבור כל n טבעי – ערך הביטוי $K(n,n+1,n+2)$ שווה ל- $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$ או ל- $\dfrac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{2}$

4. הוכח, ש- $D(2n,2n+2)=2$

5. הוכח, ש- $D(a\cdot b, b\cdot c, c\cdot a)$ מתחלק ב- $D(a,b,c)$

6. הוכח, שאם b ו-a מספרים זרים, אז גם a ו-$a+b$ מספרים זרים.

7. הוכח, שאם מספר דו-ספרתי מתחלק ב-7, אז גם המספר הדו-ספרתי, הכתוב בסדר ספרות הפוך ובתוספת ספרת העשרות של המספר הנתון, יתחלק ב-7.

8. על סמך סימני ההתחלקות – קבע, אם המספר 15,785 מתחלק ב-35.

9. על סמך הידע, שנרכש בנושא ההתחלקות קְבַע את סימני ההתחלקות של המספרים: 37,31,30,29,28,27,26.

10. הוכח, או נמק מילולית:

    א. 10^n+2 מתחלק ב-3 עבור כל n טבעי.

    ב. 10^n+17 מתחלק ב-9 עבור כל n טבעי.

    ג. המכפלה של שני מספרים זוגיים עוקבים מתחלקת ב-8.

    ד. המכפלה של שלושה מספרים עוקבים מתחלקת ב-6.

    ה. המכפלה של ארבעה מספרים עוקבים מתחלקת ב-: 24,12,8,6,3,2.

11. א. $\overline{AAA}$ הוא מספר תלת-ספרתי.
    באיזה מספר הוא חייב להתחלק?

ב. אם נעלה את המספר $\overline{AAA}$ בריבוע, באיזה מספר הוא חייב להתחלק?

12. המספר a מתחלק ב-5, והמספר b מתחלק ב-7.
באיזה מספר יהא הביטוי: $(a+b)^2-(a^2+b^2)$ חייב להתחלק?

13. בכמה מספרים מתחלקת המכפלה של שני מספרים ראשוניים?

14. A,B,C, ו-D הם מספרים ראשוניים גדולים מ-2.
באיזה מספר יהא הביטוי $(A+B)\cdot(C+D)$ חייב להתחלק?

15. $\overline{AB}$ הוא מספר דו -ספרתי המתחלק ב-9.
הוכח, כי גם המספר הארבע- ספרתי $\overline{ABBA}$ חייב להתחלק ב-9.

16. נתון, שספרת האחדות של המספר x הוא 5, ונתון, שהקשר בין x ל-y הוא $y=x^2-5$.
הוכח, שהמכפלה $x\cdot y$ מתחלקת ב-100.

17. A,B, ו-C הן ספרות השונות זו מזו. $\overline{ABC}$ הוא מספר תלת-ספרתי המתחלק ב-4. כמו-כן נתון:
$B=2$ ו- $A=2C$. הוכח, שהמספר $\overline{ABC}$ מתחלק ב-103.

18. מכפלת המספרים התלת-ספרתיים $\overline{ABC}$ ו- $\overline{DBA}$ הוא המספר החמש-ספרתי $\overline{FBGBA}$.
ידוע, כי C הוא מספר אי-זוגי, ואילו A זוגי.
הוכח, שאם מחסירים 1 מהמספר התלת- ספרתי $\overline{FGC}$, מתקבל מספר המתחלק ב-10.

19. a הוא מספר המתחלק ב-3.
הוכח, שהביטוי $a\cdot(a+3)$ חייב להתחלק ב-18?

20. מצא מספר תלת-ספרתי המתחלק ב-11, אם ידוע,שכאשר הופכים את סדר ספרותיו, מתקבל מספר הגדול ממנו ב-297 (הערה: מתקבלים כמה מספרים!).

ביבליוגרפיה

1. בוחשטב, א׳ (1966). **תורת המספרים.** מוסקבה.
2. זבלו, ס׳, קוסטרציוק, ב׳, חצת, ב׳ (1980). **אלגברה ותורת המספרים.** כרקבי, מוסקבה.
3. ליבוביץ, ד׳ (1976). **אשנב למתמטיקה,** חלקים 11-12, רמת אביב, האוניברסיטה הפתוחה.
4. פרנקל, א׳ (1956). מבוא למתמטיקה – בעיות ושיטות מן המתמטיקה החדישה, כרך 1, תל אביב.
5. רוזן, א׳ (1995). סימני התחלקות. **אתגר גליונות מתמטיקה,** גיליון מס׳ 34-35, עמודים 30-32, הפקולטות למתמטיקה – הטכניון ומכון ויצמן.