ויקטור אוקסמן ולאה אוקסמן

גבולות מפורסמים ויישומיהם בטכניקות לחישוב גבולות

מבוא

בין גבולות הפונקציות המפורסמים בולטים הגבולות הבאים:

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

2) $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

3) $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$$

4) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

5) $$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$$

גבולות אלה עוזרים למצוא גבולות רבים אחרים.

בהקשר זה השימוש בגבול מס' 1 די ידוע (החל מקורס "חדו"א" של ביה"ס – ראה למשל[1]).

יחד עם זאת, השימוש בגבול מס' 3 בהוראת נושא הגבולות – לא כל-כך רחב, אף-על-פי שלגבול זה יש פוטנציאל רב.

תארנים ומילות מפתח: *חישוב גבולות פונקציות, גבולות מפורסמים, כפל בביטוי הצמוד, פולינומים.*

נתבונן בדוגמאות:

1. דוגמאות לשימוש בגבול $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha$

דוגמה מס' 1 [1, עמ' 116, מס' 45]

נחשב $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$.

לפי השיטה הסטנדרטית, יש לכפול ולחלק בביטוי הצמוד:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}$$

נפתור את התרגיל על סמך הגבול המפורסם מס' 3:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim_{y\to 0}\left(\sqrt{\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y}}-\frac{1}{y}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{1+y}-1}{y}=\frac{1}{2}$$

כאן סימנו $\frac{1}{x}=y$ $(y\to 0)$.

דוגמה מס' 2 [1, עמ' 116, מס' 46]

נחשב:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x)$$

לפי שיטת הכפל בצמוד – נקבל:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x)(\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}+x\sqrt[3]{x^3+x^2}+x^2)}{\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}+x\sqrt[3]{x^3+x^2}+x^2}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}+x\sqrt[3]{x^3+x^2}+x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{3}$$

נמצא את הגבול הנ"ל בעזרת הגבול המפורסם מס' 3:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x)=\lim_{y\to 0}\sqrt[3]{\frac{1}{y^3}+\frac{1}{y^2}}-\frac{1}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+y}-1}{y}=\frac{1}{3}.$$

(גם כאן סימנו $\frac{1}{x}=y$, $y\to 0$).

במקרים רבים הגבול המפורסם מס' 3 עוזר גם במציאת גבולות, כאשר השימוש בשיטת הכפל בצמוד מסובך או בכלל לא יעיל.

דוגמה מס' 3

נחשב את הגבול: $\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x})$.

כאן שיטת הכפל בצמוד לא יעילה. נשתמש בגבול מס' 3. נסמן $\frac{1}{x}=y$, $y\to 0$. אז נקבל:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x})=\lim_{y\to 0}\left(\frac{\sqrt[3]{1+3y}}{y}-\frac{\sqrt{1-2y}}{y}\right)=$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\frac{3(\sqrt[3]{1+3y}-1)+3}{3y}+\frac{2(\sqrt{1-2y}-1)+2}{-2y}\right)=$$

$$\lim_{y\to 0}\left(3\cdot\frac{\sqrt[3]{1+3y}-1}{3y}+\frac{1}{y}+2\cdot\frac{\sqrt{1-2y}-1}{-2y}-\frac{1}{y}\right)=3\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{2}=2$$

2. המקרה הכללי

הכללת דוגמאות מס' 1-3 מביאה לבעיית חישוב הגבול

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} (\sqrt[n]{P_k(x)} - \sqrt[m]{Q_t(x)}) \text{ ,}$$

כאשר $P_k(x)$ ו- $Q_t(x)$ הם פולינומים ממעלה k ו-t בהתאמה (t ו-k – מספרים טבעיים, $\sqrt[n]{P_k(x)}$ ו- $\sqrt[m]{Q_t(x)}$ מוגדרות עבור כל x גדול דיו)[1].

א. $\frac{k}{n} > \frac{t}{m}$

$$F(x) = \sqrt[n]{a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_0} - \sqrt[m]{b_t x^t + b_{t-1}x^{t-1} + \ldots + b_0} =$$
$$x^{\frac{k}{n}} \sqrt[n]{a_k + \frac{a_{k-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^k}} - x^{\frac{t}{m}} \sqrt[m]{b_t + \frac{b_{t-1}}{x} + \ldots + \frac{b_0}{x^t}} =$$
$$x^{\frac{t}{m}} (x^{\frac{k}{n}-\frac{t}{m}} \sqrt[n]{a_k + \frac{a_{k-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^k}} - \sqrt[m]{b_t + \frac{b_{t-1}}{x} + \ldots + \frac{b_0}{x^t}}$$

מכאן נקבל, ש- $\lim_{x\to\infty} F(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{כאשר } \sqrt[n]{a_k} > 0 \\ -\infty, & \text{כאשר } \sqrt[n]{a_k} < 0 \end{cases}$

ב. $\frac{k}{n} < \frac{t}{m}$

---

1. לצורך הוודאות אנחנו מניחים, ש- $x \to +\infty$. אם- $x \to -\infty$, ניתן לסמן $y = -x$, $y \to -\infty$ ולחזור על אותם שלבי פתרון בהתאם למקרה.

$$F(x)=\sqrt[n]{a_k x^k+a_{k-1}x^{k-1}+\ldots+a_0}-\sqrt[m]{b_t x^t+b_{t-1}x^{t-1}+\ldots+b_0}=$$
$$x^{\frac{k}{n}}\sqrt[n]{a_k+\frac{a_{k-1}}{x}+\ldots+\frac{a_0}{x^k}}-x^{\frac{t}{m}}\sqrt[m]{b_t+\frac{b_{t-1}}{x}+\ldots+\frac{b_0}{x^t}}=$$
$$x^{\frac{k}{n}}(\sqrt[n]{a_k+\frac{a_{k-1}}{x}+\ldots+\frac{a_0}{x^k}}-x^{\frac{t}{m}-\frac{k}{n}}\sqrt[m]{b_t+\frac{b_{t-1}}{x}+\ldots+\frac{b_0}{x^t}})$$

מכאן נקבל ש- $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=\begin{cases}+\infty, & \sqrt[m]{b_t}<0 \text{ כאשר}\\ -\infty, & \sqrt[m]{b_t}>0 \text{ כאשר}\end{cases}$

ג. $\frac{k}{n}=\frac{t}{m}$

ג'1. אם $\sqrt[n]{a_k}>\sqrt[m]{b_t}$, אז

$$\lim_{x\to\infty}F(x)=\lim_{x\to\infty}(\sqrt[n]{a_k x^k+a_{k-1}x^{k-1}+\ldots+a_0}-\sqrt[m]{b_t x^t+a_{t-1}x^{t-1}+\ldots+b_0})=$$
$$\lim_{x\to\infty}[x^{\frac{k}{n}}(\sqrt[n]{a_k+\frac{a_{k-1}}{x}+\ldots+\frac{a_0}{x^k}}-\sqrt[m]{b_t+\frac{b_{t-1}}{x}+\ldots+\frac{b_0}{x^t}})]=$$
$$\lim_{x\to\infty}[x^{\frac{k}{n}}(\sqrt[n]{a_k}-\sqrt[m]{b_t})]=+\infty$$

ג'2. אם $\sqrt[n]{a_k}<\sqrt[m]{b_t}$, אז באופן דומה נקבל, ש-

$$\lim_{x\to\infty}F(x)=\lim_{x\to\infty}[x^{\frac{k}{n}}(\sqrt[n]{a_k}-\sqrt[m]{b_t})]=-\infty$$

ג'3. המקרה המסובך יותר הוא, כאשר $\sqrt[n]{a_k}=\sqrt[m]{b_t}$.

במקרה זה נסמן $x=\frac{1}{y}$.

אז

$$\sqrt[n]{a_k x^k + \ldots + a_0} = \sqrt[n]{\frac{a_k}{y^k} + \ldots + a_0} = \sqrt[n]{\frac{a_k + a_{k-1} y \ldots + a_0 y^k}{y^k}} =$$

$$\frac{\sqrt[n]{a_k + a_{k-1} y \ldots + a_0 y^k}}{y^{\frac{k}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a_k}}{y^{\frac{k}{n}}} \cdot \frac{\sqrt[n]{1 + \frac{a_{k-1}}{a_k} y + \ldots + \frac{a_0}{a_k} y^k} - 1 + 1}{\frac{a_{k-1}}{a_k} y + \ldots + \frac{a_0}{a_k} y^k} \cdot \left(\frac{a_{k-1}}{a_k} y + \ldots + \frac{a_0}{a_k} y^k \right) =$$

$$\frac{\sqrt[n]{a_k}}{y^{\frac{k}{n}}} \cdot \left[\frac{\sqrt[n]{1 + \frac{a_{k-1}}{a_k} y + \ldots + \frac{a_0}{a_k} y^k} - 1}{\frac{a_{k-1}}{a_k} y + \ldots \frac{a_0}{a_k} y^k} \cdot \left(\frac{a_{k-1}}{a_k} y + \ldots + \frac{a_0}{a_k} y^k \right) + 1 \right]$$

נשים לב, שבהתחשב בגבול המפורסם מסי 3, $\lim_{y \to 0} \left[\frac{\sqrt[n]{1 + \frac{a_{k-1}}{a_k} y + \ldots + \frac{a_0}{a_k} y^k} - 1}{\frac{a_{k-1}}{a_k} y + \ldots + \frac{a_0}{a_k} y^k} \right] = \frac{1}{n}$

.(*)

באופן דומה נקבל ש-

$$\sqrt[m]{b_t x^t + \ldots + b_0} = \frac{\sqrt[m]{b_t}}{y^{\frac{t}{m}}} \cdot \left[\frac{\sqrt[m]{1 + \frac{b_{t-1}}{b_t} y + \ldots + \frac{b_0}{b_t} y^t} - 1}{\frac{b_{t-1}}{b_t} y + \ldots + \frac{b_0}{b_t} y^t} \cdot \left(\frac{b_{t-1}}{b_t} y + \ldots + \frac{b_0}{b_t} y^t \right) + 1 \right].$$

כמו כן, גם $\lim_{y \to 0} \left[\frac{\sqrt[m]{1 + \frac{b_{t-1}}{b_t} y + \ldots + \frac{b_0}{b_t} y^t} - 1}{\frac{b_{t-1}}{b_t} y + \ldots + \frac{b_0}{b_t} y^t} \right] = \frac{1}{m}$ (**).

לכן בהתחשב ב-(*) וב-(**), נקבל

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[n]{a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + ... + a_0} - \sqrt[m]{b_t x^t + b_{t-1}x^{t-1} + ... + b_0}\right) =$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\frac{\sqrt[n]{a_k}}{y^{\frac{k}{n}}}\cdot\left[\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{a_{k-1}}{a_k}y + ... + \frac{a_0}{a_k}y^k\right)+1\right] - \frac{\sqrt[m]{b_t}}{y^{\frac{t}{m}}}\cdot\left[\frac{1}{m}\cdot\left(\frac{b_{t-1}}{b_t}y + ... + \frac{b_0}{b_t}y^t\right)+1\right]\right) =$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\sqrt[n]{a_k}\left[y^{1-\frac{k}{n}}\left(\frac{a_{k-1}}{na_k} - \frac{b_{t-1}}{mb_t}\right) + y^{2-\frac{k}{n}}\left(\frac{a_{k-2}}{na_k} - \frac{b_{t-2}}{mb_t}\right) + ... + y^{i-\frac{k}{n}}\left(\frac{a_{k-i}}{na_k} - \frac{b_{t-i}}{mb_t}\right) + ...\right]\right)$$

מכאן נובע ש- :

ג' 3.1. כאשר $\frac{k}{n} < 1$, $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$ (כי $\lim_{y\to 0}\left(y^{i-\frac{k}{n}}\right) = 0$ עבור כל i, $1 \le i \le k$).

ג' 3.2. כאשר $\frac{k}{n} = 1$, $\lim_{x\to\infty} F(x) = \sqrt[n]{a_k}\left(\frac{a_{k-1}}{na_k} - \frac{b_{t-1}}{mb_t}\right)$.

ג' 3.3.

כאשר $\frac{k}{n} > 1$, נקבל $\lim_{x\to\infty} F(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{אם } \frac{a_{k-1}}{na_k} > \frac{b_{t-1}}{mb_t} \\ -\infty, & \text{אם } \frac{a_{k-1}}{na_k} < \frac{b_{t-1}}{mb_t} \end{cases}$.

נשאר להתבונן במקרה בו $\frac{a_{k-1}}{na_k} = \frac{b_{t-1}}{mb_t}$.

נסמן $j = \min\left\{ g \mid 1 \le g \le i-1, \frac{a_{k-g}}{na_k} - \frac{b_{t-g}}{mb_t} \neq 0 \right\}$ **(***)** ,

כאשר $1 \le i-1 < \frac{k}{n} \le i$, i שלם, $i \le k, i \le t$.

אז נקבל ש- $\lim_{x\to\infty} F(x) = \begin{cases} +\infty, \frac{a_{k-g}}{na_k} > \frac{b_{t-g}}{mb_t} & \text{אם} \\ -\infty, \frac{a_{k-g}}{na_k} < \frac{b_{t-g}}{mb_t} & \text{אם} \end{cases}$.

אם j המוגדר ב-(***) לא קיים, אז $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$.

דוגמה מס' 4

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt[15]{32x^{20}+x^{13}-3x^9+3}-\sqrt[6]{4x^8-x^5+4x^4-2x+5})$$

כאן $n=15, m=6, k=20, t=8$, $\frac{k}{n}=\frac{t}{m}=\frac{4}{3}$ (מקרה ג')

ו- $\sqrt[n]{a_k}=\sqrt[m]{b_t}=\sqrt[3]{2}$ (מקרה ג' 3) , $\frac{k}{n}=\frac{4}{3}>1$ (מקרה ג' 3.3).

כאן $1<\frac{k}{n}<2$,כלומר $i=2$ ו- $1\le g\le 1$. ז.א. $g=1$, $\frac{a_{k-g}}{na_k}-\frac{b_{t-g}}{mb_t}=0$

ולכן ה- j המוגדר ע"י (***) לא קיים, והגבול הנ"ל 0.

דוגמה מס' 5

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt[4]{x^3+x^2-1}-\sqrt[8]{x^6+x^5+x+4})$$

$n=4, m=8, k=3, t=6$, $\frac{k}{n}=\frac{t}{m}=\frac{3}{4}$ (מקרה ג'), $\sqrt[n]{a_k}=\sqrt[m]{b_t}=1$ (מקרה ג' 3),

$\frac{k}{n}=\frac{3}{4}<1$ (מקרה ג' 3.1)

לכן הגבול הנ"ל הוא 0.

דוגמה מס' 6

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt[2]{4x^5-8x^4+3x^2+1}-\sqrt[4]{16x^{10}-2x^9+5x^7-4x+2})$$

$n=2, m=4, k=5, t=10$, $\frac{k}{n}=\frac{t}{m}=\frac{5}{2}$ (מקרה ג'), $\sqrt[n]{a_k}=\sqrt[m]{b_t}=2$ (מקרה ג' 3) ,

$\frac{k}{n}=\frac{5}{2}>1$ (מקרה ג' 3.1)

$2<\frac{k}{n}<3$,i=3 , והגבול הנ"ל הוא ∞, כי $\frac{1}{2}\cdot\frac{-8}{4}-\frac{1}{4}\cdot\frac{-2}{16}<0$.

דוגמה מס' 7

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt[5]{32x^5-3x^4+16x+1}-\sqrt[7]{128x^7-46x^6-2x^3-10})$$

כאן $n=5, m=7, k=5, t=7$, $\frac{k}{n}=\frac{t}{m}=1$ (מקרה ג') , $\sqrt[n]{a_k}=\sqrt[m]{b_t}=2$ (מקרה ג' 3) ,

$\frac{k}{n}=1$ (מקרה ג' 3.2) .

לכן הגבול הנ"ל שווה ל- $2(\frac{1}{5}\cdot\frac{-3}{32}-\frac{1}{7}\cdot\frac{-46}{128})=\frac{73}{1120}$

נתבונן בגבול מפורסם אחר $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$, שגם עוזר בפתרון בעיות רבות הקשורות לחישוב גבולות.

3. דוגמאות לשימוש בגבול $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

דוגמה מס' 8

נחשב $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x$.

$$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{-x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+1}{x-1}\right)^{-x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{-x} =$$
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{-x+1-1}$$

נסמן $x-1=y$ ($y\to\infty$). אז נקבל

$$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x = \lim_{y\to\infty}\left(\left(\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-1}\right) = 1/e$$

דוגמה מס' 9 [1, עמ' 138, מס' 62]

נחשב .

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)^{\frac{x}{4}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)^{\frac{x}{4}} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{4}} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x/2}\right)^{\frac{x}{2\cdot 2}} = \lim_{y\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{y}\right)^y\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

(כאן סימנו $\frac{x}{2}=y$, $y\to\infty$).

דוגמה מס' 10

נחשב $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x^2+1}{x^3}\right)^{x+1}$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x^2+1}{x^3}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x^3}{2x^2+1}}\right)^{\frac{x^3}{2x^2+1}}\right]^{\frac{2x^2+1}{x^3}(x+1)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^3}{2x^2+1}}\right)^{\frac{x^3}{2x^2+1}}=\lim_{y\to\infty}(1+\frac{1}{y})^y=e$$

(כאן סימנו $y=\dfrac{x^3}{2x^2+1}$, $y\to\infty$).

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left(\frac{2x^2+1}{x^3}\right)(x+1)\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+2x^2+x+1}{x^3}=2$$

לכן הגבול הנתון שווה ל- e^2 .

המקרה הכללי

4. הכללת דוגמאות מס' 1-3 מביאה לבעיית חישוב הגבול:

$\lim_{x\to\infty}F(x)=\lim_{x\to\infty}(1+\dfrac{P(x)}{Q(x)})^{T(x)}$, כאשר P(x), Q(x) ו- T(x) הם פולינומים

ו- $\lim_{x\to\infty}(\dfrac{P(x)}{Q(x)})=0$.

$$\lim_{x\to\infty}F(x)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{Q(x)}{P(x)}}\right)^{T(x)}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{Q(x)}{P(x)}}\right)^{\frac{Q(x)}{P(x)}\cdot T(x)\cdot\frac{P(x)}{Q(x)}}$$

מכיוון ש- $\lim_{x\to\infty}(\frac{P(x)}{Q(x)})=0$, $\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}=e$ $=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{Q(x)}{P(x)}}\right)^{\frac{Q(x)}{P(x)}}$.

($y=\frac{Q(x)}{P(x)}$).

לכן $\lim_{x\to\infty}F(x)=e^{\lim_{x\to\infty}\left(T(x)\frac{P(x)}{Q(x)}\right)}$.

דוגמה מס' 11

נתבונן שוב ב- $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x^2+1}{x^3}\right)^{x+1}$.

כאן

$P(x)=2x^2+1$, $Q(x)=x^3$ ו- $T(x)=x+1$, $\lim_{x\to\infty}(\frac{P(x)}{Q(x)})=0$.

לכן מיד נקבל, שהגבול הנ"ל שווה ל-

$$e^{\lim_{x\to\infty}\left((x+1)\cdot\frac{2x^2+1}{x^3}\right)}=e^2 .$$

דוגמה מס' 12

נחשב $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^7-x^4-6x^3+3x^2-x-5}{4x^7+2x^4-x^3+3x^2-6}\right)^{3x^3-2x^2+x-1}$.

כאן

$$\left(\frac{4x^7-x^4-6x^3+3x^2-x-5}{4x^7+2x^4-x^3+3x^2-6}\right)^{3x^3-2x^2+x-1}=\left(1+\frac{-3x^4-5x^3-x+1}{4x^7+2x^4-x^3+3x^2-6}\right)^{3x^3-2x^2+x-1}$$

כלומר, $P(x)=-3x^4-5x^3-x+1$, $Q(x)=4x^7+2x^4-x^3+3x^2-6$ ו-
$T(x)=3x^3-2x^2+x-1$, $\lim_{x\to\infty}(\frac{P(x)}{Q(x)})=0$.

לכן הגבול הנתון שווה ל- $e^{-9/4}=e^{\lim_{x\to\infty}\left((3x^3-2x^2+x-1)\frac{-3x^4-5x^3-x+1}{4x^7+2x^4-x^3+3x^2-6}\right)}=e^{\lim_{x\to\infty}\left(T(x)\frac{P(x)}{Q(x)}\right)}$.

מראי מקומות:

1. גורן, ב' (חש"ד) . **חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי** (4 ו-5 יחידות לימוד). הוצאת המחבר.
2. קון, ב"צ, זעפרני, ס' (1996). **חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1.** בק.