

מחשבות על אינטואיציה ופורמליזם במתמטיקה או בלשון החוקרים בפסיכולוגיה קוגניטיבית:

חשיבה אינטואיטיבית לעומת חשיבה אנליטית
Is mathematics just an elaboration of common sense?

אישית לוחצת עם פרופסור אורי לירון



ד"ר קרני שיר

מרצה במכללת שאנן - המכללה האקדמית הדתית
לחינוך, קריית שמואל, חיפה.
חוקרת בפרוייקט "הבזקים" - הפקולטה למתמטיקה,
טכניון, חיפה.

קרני שיר

את פרופסור אורי לירון (מכאן ואילך אני מרשה לעצמי לקרוא לו



פשוט 'אורי') יצא לי להכיר לפני
25 שנה בערך, בשנה השנייה
ללימודי התואר הראשון שלי
בטכניון. למדתי אצל אורי את
הקורס "עולמות זוטא – למידה
בסביבות ממוחשבות", ולימים
הפכתי למתרגלת של קורס זה
ובהמשך אפילו למרצה שלו.

חוץ מללמוד על משתנים, לולאות,

רקורסיה, חידדקים ומגדלי האנוני (כי איך אפשר ללמוד מחשבים בלי
לתכנת פתרון רקורסיבי למגדלי האנוני...) למדתי גם מה זו למידה
קונסטרוקטיביסטית אמיתית, מה המשמעות האמיתית של קודם
לבנות את הידע, ואחר כך לערוך רפלקציה (לרוב בשיחה קבוצתית),
ואיך המילה 'מרצה' זו המילה האחרונה שהיה אפשר לתאר בה את
תפקידו של אורי בקורס, או את תפקידה של אורית (היום פרופ'
אורית חזן) – שהייתה "המתרגלת" של אותו קורס.

פגשתי את אורי שוב מספר שנים לאחר מכן, כאשר למדתי לתואר
השלישי שלי. פרט להיותו ראש המחלקה להוראת המדעים באותה
עת, זכיתי ללמוד אצלו את הקורס "היבטים אבולוציוניים בהוראת
המתמטיקה", שהיה אחד הקורסים המעניינים שיצא לי ללמוד
בלימודי הדוקטורט שלי.

מתוקף היותו ראש המחלקה, ומתוקף היותי בוועד הסטודנטים, יצא
לנו לתכנן ביחד כמה אירועים חברתיים, ואפילו זכורה לי תמונה
שצילמה אורית אחרת (פרופ' אורית זסלבסקי, שהייתה בין השאר
גם המנחה שלי בדוקטורט), שבה שנינו ספוגים במים רגע לאחר
שסיימנו רפטינג חווייתי על הירדן בעת טיול מחלקתי.

אחרי ההקדמה הזו, אתם בוודאי לא מתפלאים יותר מדוע בחרתי
בפרופ' אורי לירון להיות המרואיין הראשון שלי בסדרת הראיונות
במדור חדש זה של כתב העת 'מחקר ועיון בחינוך מתמטי'.

נעשים מתוך מסירות ואהבה, ודווקא דגשים אלו הם המאפשרים את ההקפדה והחומרה הנדרשים כדי לגדל כראוי את "ילדיו".

ואם אנו כבר עוסקים בגידול ילדים, בואו נראה מה יש לאורי לספר לנו בתחום זה.

רקע אישי

אורי פגש את אשתו יעל, שהייתה אז סטודנטית לפסיכולוגיה וכיום פסיכולוגית קלינית ופסיכואנליטיקאית, בתזמורת האוניברסיטה העברית בגבעת רם שבה, הוא מדגיש, היא הייתה בתפקיד החליל הראשון והוא החליל השני.



ליעל ואורי שלושה ילדים: **אורנה** (51) שכמו אמה גם היא פסיכולוגית קלינית ופסיכואנליטיקאית; **יובל** (48) (או יובלל – כפי שהוא ידוע בשם החיבה שלו), בוגר תלפיות ובית הספר למשחק של יורם לוינשטיין, עובד במכון ויצמן בפיתוח תוכנה ובקבוצת התיאטרון של חוקרי מכון ויצמן. כמו כן הוא מנחה בסדנאות בין-לאומיות שבהן מאמנים מדענים צעירים לעבוד בעבודת צוות. הבן הצעיר **אמיר** (43) הוא בוגר בית הספר לקולנוע של לוס אנג'לס (LAFS), והיום מתעניין בתרבות האינדיאנים ביערות האמזונס בברזיל.

נוסף על שלושת ילדיו יש לאורי גם שישה **נכדים** שהוא מאוד גאה בהם. למעשה כאשר שאלתי אותו באשר לתחביביו, הוא ענה לי שאחת האהבות הגדולות שלו היא להיות עם הנכדים. לפי המסורת המשפחתית, יעל ואורי נוסעים סולו לחו"ל עם כל נכד או נכדה שמגיעים לגיל המצוות. הם נסעו כבר ללונדון, אמסטרדם וברצלונה עם חמישה מתוך ששת הנכדים. המלצות מקוראים של המדור באשר ליעד השישי שכדאי להם לנסוע אליו כבר המצווה של הנכד האחרון בעוד כשנה אפשר לשלוח למערכת העיתון...

כאשר שאלתי את אורי מה הסוד שלו במערכת היחסים היפה שהוא בנה עם נכדיו, הוא אמר לי שגישתו היא כן לנהל אתם שיתוף מעמיקות על כל הנושאים שבעולם, אבל לא להפור ולשאול שאלות טרחניות! אז לכל הסבים והסבתות שהגיעו בקריאה עד לכאן – נא

לא יודעת מה איתכם, אותי מעניין מאוד להכיר את בן האדם שיושב מולי, את המשפחה שלו, את התחביבים שלו, ועוד דברים שלא נוגעים ישירות לרקע האקדמי שלו ולרשימת הפרסומים שלו (אבל אל חשש, גם לזה נגיע בהמשך). אז אם אתם מתחברים פחות, תרגישו חופשי לדלג על שני החלקים האלה של הריאיון הנוגעים לרקע המקצועי והאישי של אורי ולהמשיך ישר לחלקים הדנים בחינוך מתמטי, אינטואיציה ופורמליזם במתמטיקה.

אורי נולד וגדל בקיבוץ ניר דוד (תל עמל) שבעמק בית שאן. הוא עזב את הקיבוץ רק לאחר השירות הצבאי, כאשר התברר שרצונו ללמוד מתמטיקה-פיזיקה באוניברסיטה לא מתיישב עם האידיאלוגיה ששרתה בקיבוץ בימים ההם, על אף מאמצים ניכרים שעשו כל הנוגעים בדבר למצוא פתרון הולם.

אביו של אורי לירון, פרופ' שניאור ליפסון, היה מוותיקי מכון ויצמן למדע, מייסד המחלקה לפיזיקה כימית ומנהל מדעי של המכון. מאז היותו ילד, ידע אורי שהוא רוצה ללכת בעקבותיו. כאמור, הוא למד לתואר ראשון במתמטיקה-פיזיקה באוניברסיטה העברית בירושלים, וגילה במהלך לימודי התואר הראשון שהוא הכי אוהב בפיזיקה את המתמטיקה שעומדת מאחוריה. לפיכך הוא המשיך לתואר שני ושלישי במתמטיקה באוניברסיטה העברית, וסיים את הדוקטורט בתורת החוגים בהנחייתו של פרופ' שמשון עמיצור. (בזמן שאורי עבד על הדוקטורט בהנחיית פרופ' עמיצור, הוא היה המתרגל בקורס אלגברה מודרנית של בתו, חנה עמיצור, לימים חנה פרל, מפמ"רית המתמטיקה במשרד החינוך.) לאחר מכן, בעת פוסט-דוקטורט היה מרצה אורח במחלקות למתמטיקה באוניברסיטת אורגון ובאוניברסיטת קליפורניה בלוס אנג'לס (UCLA). עם חזרתו ארצה הגיע לפקולטה למתמטיקה בטכניון ולימד בה קורסים שונים כגון חדו"א, אלגברה ליניארית ותורת החוגים. אורי התעניין מאוד בפסיכולוגיה של המתמטיקה, בהיסטוריה של המתמטיקה, בפילוסופיה של המתמטיקה, ובעיקר בהוראת המתמטיקה – דבר שלא תמיד קיבלו בעין יפה עמיתיו הבכירים בפקולטה למתמטיקה, שסברו כי רצוי שיקדיש את כל זמנו למחקר המתמטי הטהור. בד בבד הוא החל להרגיש מתוסכל לעיתים עם המחקר במתמטיקה טהורה, שבו מצא את עצמו מצטמצם ומתמחה בפניה זעירה של הידע המתמטי, ועובד בעיקר עם עצמו, וכך לאחר כמה שנים בפקולטה למתמטיקה, החליט לעשות "הסבה מקצועית" ועבר לעסוק במחקר ופיתוח בחינוך מתמטי. המחקר בחינוך מתמטי אפשר לאורי לעבוד עם אנשים, הן עם חוקרים אחרים והן עם מורים ותלמידים, ואפשר להתבונן בתמונה במלואה. המחקר גם אפשר לו להרחיב את תחומי עיסוקו ולהיכנס לעומק לנושאים, כמו מדעי המחשב, פסיכולוגיה קוגניטיבית, פסיכולוגיה אבולוציונית ועוד נושאים שבהם הוא מגדיר את עצמו – בענווה רבה – כחובב רציני שלהם. ("חובב", כי אינו עוסק במחקר בנושאים אלו; "רציני", כי קרא והעמיק בהם עד כדי יכולת לנהל "שיחה אינטליגנטית" עם מקצוענים בשטחים אלו, ואף להשתמש בהם במחקריו בחינוך מתמטי.)

מה שכן, למרות הקריירה המקצועית המרשימה שלו, שבה הוא גם החזיק בקתדרה על שם משפחת צ'רציל להוראת הטכנולוגיה והמדעים בטכניון, אורי הדגיש לפניי כי כאשר יגיע לפניי כיסאו של הקב"ה ויצטרך להישפט על חייו ועל תרומתו לאנושות, יעיד כי הדבר החשוב ביותר שעשה בחייו המקצועיים ושהוא הכי גאה בו, הוא הדוקטורנטיות והדוקטורנטים הרבים שהנחה. הוא רואה אנלוגיה בין הנחיית הדוקטורנטים שלו ובין גידול ילדיו; שניהם

לקחת לתשומת ליבכם. כאימא לשלושה ילדים אני יכולה להעיד כי זו ללא ספק עצה ששווה זהב.

תחביבים נוספים הם האזנה למוזיקה וקריאת ספרים. כאשר ביקשתי מאורי המלצה על ספר אהוב במיוחד הוא המליץ לי על 'לב לבן כל



כך' של חויאר מריאס (אורית קרוגלנסקי תרגמה אותו מספרדית). מעבר לעלילה המרתקת, הספר עוסק רבות במצב הידיעה של משתתפי העלילה, ולדעתו זה סיפור מדהים עם עומק פילוסופי (והוא לא רצה לספר לי יותר כדי לא להרוס לכם ולי את

חויית הקריאה). מאותה סיבה בדיוק הוא נהנה מאוד מהסרט הוותיק "הבגידה" שמתחיל בהווה וממשיך אחורה בזמן, ועוסק בשאלה הפילוסופית (זהירות ספוילר!) מהי משמעות הבגידה: האם הבוגד הוא חברך הטוב המקיים פרשת אהבים עם אשתך, או שמא הבגידה האמיתית היא שלך, שידעת כל השנים על פרשת האהבים הזו, אבל לא גילית לחברך הטוב שאתה יודע?...

עוד ספר אהוב על אורי הוא הספר "סוס אחד נכנס לבר" של דוד גרוסמן, זוכה פרס ישראל לספרות, שגם בו בא לידי ביטוי המתח הפסיכולוגי האהוב עליו כל כך, בין מצבי הידיעה של המשתתפים השונים.

התחביב האחרון שחלק איתי אורי, שהוא בעצם גם מקצועו, הוא כתיבת מאמרים. מבחינתו לכתוב מאמר על מחקר איכותני, זה בעצם כמו לספר סיפור: אתה מסתכל על סיטואציה מעניינת בזכוכית מגדלת, ומנסה לכתוב עליה סיפור שיאיר אותה בדרך מעניינת וחדשנית.

חשובות על חינוך מתמטי: אינטואיציה מול פורמליזם במתמטיקה

אורי עבר במשך הקריירה המחקרית שלו בין נושאים רבים ומגוונים, אבל במבט מסכם לאחור, הנושא שמעסיק אותו כחוט השני לאורך כל הקריירה הוא הקשר במתמטיקה והוראתה בין חשיבה אינטואיטיבית לחשיבה פורמלית (או בלשון הפסיכולוגים: חשיבה אנליטית). היות שאורי בקיא בנושא הזה הרבה יותר ממני, ביקשתי ממנו לחשוב על שאלות בנושא זה שהיה מציג לעצמו אילו הוא היה מראיין. השאלות שהציע אורי היו כל כך חשובות וטובות, שהחלטתי להציג אותן כאן כמעט לגמרי בלשון.

אינטואיציה ופורמליזם - האם תוכל לספר לי יותר על חשיבות הנושא?

המתמטיקאי היוצר נמצא רוב הזמן במצב (mode) של חשיבה אינטואיטיבית. כל החלק היצירתי (המנוגד לרוטיני) נמצא שם. הוא נזקק למצב האנליטי בעיקר לצורך בדיקה מדוקדקת של ההשערות שצצות במצב האינטואיטיבי, או לצורך סיכום והצגת התוצאות

לציבור הסטודנטים או החוקרים. מישהו אמר שללמד רק את הצד הפורמלי (כפי שבמידה רבה קורה בבית הספר ובאוניברסיטה) זה כמו ללמד בשיעורי מוזיקה תווים וחוקי המוזיקה, בלי שאי פעם התלמידים ישמעו מוזיקה. במילים אחרות, המוזיקה של המתמטיקה נמצאת בצידה האינטואיטיבי, ודווקא הוא מונח בהוראה.

גם בהוראה ולמידה אורי מעדיף כניסה אינטואיטיבית לנושא הנלמד, ומעבר הדרגתי (תלוי בגיל הלומדים ורמתם) לרמה הפורמלית. לכל נושא מתמטי יש היבטים אינטואיטיביים והיבטים פורמליים, והקשר ביניהם אינו פשוט. לדוגמה: הצגה אינטואיטיבית של פונקציה כמכונת פונקציות לעומת הצגתה הפורמלית כקבוצה של זוגות סדורים. ידוע היטב כי החשיבה האינטואיטיבית חשופה לשגיאות, אבל לתפיסתו של אורי (על סמך פיאה'ה ופאפרט, ממצאי לונג), המעבר לרמה האנליטית צריך להיעשות באמצעות debugging (ולא !discarding) של החשיבה האינטואיטיבית.

האם מתמטיקה היא המשכו של החיגון הפשוט (elaboration of common sense)?

אורי: בצעירותי חשבתי שהתשובה היא כן, כי לימוד המתמטיקה בא לי בקלות והמושגים וההגדרות נראו לי טבעיים והגיוניים. ככל שהתקדמתי בלימודי המתמטיקה ובהמשך במחקר חינוכי ופסיכולוגי, ראיתי יותר ויותר עד כמה טעיתי במחשבה זו, בעיקר כשמדברים על החלקים המודרניים

והפורמליים של המתמטיקה; אבל יש גם מטלות פשוטות רבות שהתשובות הנכונות להן נוגדות את האינטואיציה. (על מחקרים מסוג זה קיבל הפסיכולוג דני כהנמן בשנת 2002 פרס נובל.) החיפוש אחרי מקורות הקשיים הרבים בלימוד מתמטיקה, ובעיקר המקומות שבהם המתמטיקה הפורמלית מתנגשת בהיגיון הישר של חיי יום-יום, הביאו אותי להיכנס לעומק המחקרים בנושאים קרובים בפסיכולוגיה קוגניטיבית ואבולוציונית. למשל, אחת

התובנות שרכשתי מעיוני אלו, היא שהאבולוציה פיתחה את המוח האנושי כך שיצטיין במיוחד בחשיבה חברתית מורכבת, ושחלק מהטעויות הנפוצות נובעות מהתנגשות בין הלוגיקה של חשיבה חברתית ללוגיקה המתמטית (פירוט במאמרים המצורפים).

איך התגלה לך העולם האינטואיטיבי שמתחבא מאחורי המתמטיקה הפורמלית, כפי שהיא נלמדת בבית הספר ובאוניברסיטה?

היום אני יודע שאפשר ללמוד מתמטיקה ולעבור בחינות בהצלחה בלי להיות מודע לצד האינטואיטיבי של החומר הנלמד, כפי שאני עשיתי בבית הספר ואפילו בלימודי התואר הראשון באוניברסיטה, למרות שסיימתי בהצטיינות. רק בלימודי התואר השני, כאשר היה לי יותר זמן ללמוד ולהעמיק בחומר מעבר לדרישות הבחינות, ובמיוחד במרכיבים של לימוד עצמי, גיליתי את העולם האינטואיטיבי הנרחב, העשיר והמקסים שנמצא מאחורי המושגים וההוכחות והתאוריות כפי שלמדנו אותם בחומר הרשמי. התפעלתי מהיופי שגיליתי בעצמי, ואפילו כעסתי על כך שאף אחד לא טרח להאיר את עיניי להכיר את העולם הנפלא הזה. בזמן ההוא גם החלטתי שכאשר אני אהיה מרצה למתמטיקה, אדאג למלא את החסר הזה: אני כן

אלמד את הסטודנטים את הרעיונות האינטואיטיביים שמאחורי הפורמליזם (ה"מוזיקה" של המתמטיקה)! לרוע המזל, שכשהגיע הזמן לממש את ההחלטה הזו, גיליתי שזה לא עובד (מה שכמובן מוכר היטב לחוקרים בחינוך מתמטי): אתה לא יכול "ללמד" אינטואיציה. זה משהו שמתפתח אצל הלומד בעבודה קשה ולאורך זמן, ולא משהו שאפשר "להעביר" מהמורה לתלמיד. חלק גדול מהקריירה שלי הקדשתי לחיפוש ופיתוח דרכים לעזור לתלמידים לפתח אינטואיציות מתמטיות (שזה כמעט כמו לעזור להם להבין מתמטיקה).

האם תוכל לתאר מספר נושאים עיקריים שעסקת בהם לאורך השנים, הקשורים לנושא של אינטואיציה לעומת פורמליזם?

- למידת מתמטיקה דרך תכנות, במיוחד בשנות השמונים בשפת לוגו (לצעירים) ובשפת ISetL (לסטודנטים באוניברסיטה). (היום נעשים מאמצים בכיוונים דומים בסביבת Scratch). הרעיון המרכזי הוא שהתכנות מהווה פורמליזציה של האינטואיציה של הלומד לגבי הנושא הנדון, והתוצאה על מסך המחשב עוזרת לו לעשות דיבאגינג בו-זמנית הן של התוכנית שכתב והן של חשיבתו, עד שהוא מגיע לניסוח הפורמלי הנכון. בגלל המשוב מהמחשב, הלומד הרבה פחות תלוי במשוב מהמורה. וגם סוג המשוב הוא שונה. במקום להגיד נכון או לא נכון, המחשב בתגובתו (פלט, ציור או הודעת שגיאה) כאילו אומר: "הנה כך הבנתי (או לא הבנתי) את מה שכתבת, האם לכך התכוונת?"

- הוכחות מובנות לעומת הוכחות ליניאריות. מדובר בשיטה מהפכנית שפותחה במדעי המחשב להתמודדות עם סיבוכיות קוגניטיבית של מערכות תוכנה גדולות, ואני הראיתי איך ליישמה לגבי הוכחות במתמטיקה. הרעיון הוא להבנות הוכחות במבנה היררכי בסגנון top-down, שמדגיג את הרעיונות העיקריים שסביבם בנויה ההוכחה, וזאת במקום השיטה הליניארית, שמדגישה את התקפות הלוגית, אבל מסתירה את הרעיונות הגולביים של ההוכחה.

- נושאים נוספים שחקרתי הקשורים בהוכחות: הקשיים המיוחדים בהבנת הוכחות בדרך השלילה, ומחקר משותף עם אורית זסלבסקי בנושא הוכחות גבריות (כלומר הוכחות המתבצעות על דוגמה, אבל בכל זאת מדגישות את כלליות ההוכחה ולמה היא עובדת גם במקרה הכללי).

- תורת התהליך הכפול (Dual-Process Theory). (מחקרים משותפים עם אורית חזן, עם בוריס קויצ'ו ועם ליסר איירסבו מדנמרק). כאן השתמשנו במחקרים ובתאוריות מפסיכולוגיה קוגניטיבית ומפסיכולוגיה אבולוציונית על מנת לנתח בדרכים חדשות שגיאות אופייניות של תלמידים וסטודנטים במטלות מתמטיות שונות. ניתוחים אלו הראו בין השאר שהפער בין החשיבה האינטואיטיבית והאנליטית הוא גדול ועמוק ממה שחשבנו בתחילה, ומכאן הטעות שלי בחשיבתי המוקדמת שמתמטיקה היא בסך הכול המשך מתוחכם של ההיגיון הישר (elaboration of common sense). בנוסף, מחקרים אלו מדגישים את התופעה שטעויות במטלות מתמטיות לעיתים נובעות לא מידע פגום, אלא מ"השתלטות" של החשיבה האינטואיטיבית (הקלה, המהירה והאוטומטית) על החשיבה האנליטית (הכבדה, האיטית והמאומצת). ניתוחים אלו גם הראו שאנשים נוטים להשתמש בסוגי אינטליגנציה אחרים (כגון אינטליגנציה חברתית), שבחיי יום-יום נתנים בדרך כלל תוצאות מצוינות, אבל במטלות מתמטיות גורמים לעיתים לשגיאות.

- "שגיאות טובות" ותהליכי גישור (מחקרים משותפים עם אברהם הרמון ועם ליסר איירסבו). למחקרים והתאוריות מפסיכולוגיה על הפער בין חשיבה אינטואיטיבית ואנליטית יש חשיבות רבה להבנה מעמיקה יותר של שגיאות נפוצות, אבל בניגוד לפסיכולוגים, אנחנו לא מסתפקים בתיעוד התופעה, אלא שואלים, בתור אנשי חינוך, מה אפשר לעשות בנידון? ביחד עם חלק מהפסיכולוגים (למשל גיגנצ'ר), אנחנו מאמצים את הגישה שטוענת שאלו הן "שגיאות טובות", כלומר הן תוצאה הכרחית של מערכת אינטליגנטית שהוכשלה על ידי תנאים לא אופייניים. בכך התופעה דומה לזו של האשליות האופטיות, ומכאן הכינוי "אשליות קוגניטיביות" או "מלכודות אינטואיציה". בהתאם לכך אנחנו מאמינים שהאינטואיציות שמייצרות את השגיאות הנ"ל נובעות ממקורות טובים ואין צורך (וגם מחקרים מראים שאין אפשרות) לסלק אותן או להחליף אותן. באנלוגיה לתכנות (כאמור, בעקבות פיאוזה ופארט), כאשר מתגלים "באגים" באינטואיציות, אנחנו לא מסלקים אותן אלא עורכים דיבאגינג – שיפורים ותיקונים הדרגתיים עד שהאינטואיציה המתוקנת תביא לתשובות נורמטיביות. לצורך זה פיתחנו שיטות גישור שיכולות להביא את הלומד לתת תשובות שהן גם נכונות וגם אינטואיטיביות עבורו (כלומר מרגישות טבעיות ו"שייכות" לו).

איך ליישם בהוראה בשטח את תאוריית "השגיאות הטובות" ובמילים אחרות, אם אנחנו מאמינים שהאינטואיציה האנושית היא דבר טוב, איך ניישם אמונה זו בהוראה בשטח, בהתחשב בכך שהאינטואיציה לעיתים קרובות גורמת לשגיאות מתמטיות?

יש דרכים רבות ושונות לענות על שאלה זו, וכאן אביא תיאור סכמתי וקצר של אחת האפשרויות. (בתיאור שלהלן חלק מהפיתוחים הנדרשים הם ברמת המורה וחלק ברמה של צוותים של מפתחי תוכניות לימודים וחומרי למידה).

ראשית, אם בכוונתכם ללמד מושג מתמטי מסוים, חפשו תחילה את הבסיס האינטואיטיבי לאותו נושא. אם הצלחתם, יש לכם גרסה ראשונית "הוגנת" של המושג, גם אם קצת פשטנית ולא לגמרי מדויקת, שתתקבל באופן טבעי על ידי ההיגיון הישר היום-יומי של כמעט כל התלמידים. שנית, במקום לחשוב על איך להסביר את המושג, חישבו על פעילות (עם מחשב או בלעדיו) שתגרום לתלמידים להתנסות בצורה פעילה וחוויתית עם מושג זה, ועם הקשריו ותוצאותיו. שלישית, ערכו שיחה קבוצתית שתעודד רפלקציה על הפעילות שחווי התלמידים. במקרים המוצלחים במיוחד, התלמידים יגיעו בכוחות עצמם, דרך השיחה המונחה, לתובנות שאתם (המורים) ממילא רציתם להנחיל להם. במקרים אלו תוכל "להעביר את החומר" המתוכנן פשוט כסיכום מסודר של ההתנסות שלהם ושל הרפלקציה שנערכה בעקבותיה. במקרים אחרים (במטלות מהסוג של "מלכודות אינטואיציה"), התלמידים יכולים להגיע למסקנות מוטעות, ואז המורה יכול לעזור להם ליצור גישור בין הפתרון האינטואיטיבי והפתרון הנורמטיבי. זהו צעד לא פשוט, והדרכים לכך מפורטות במאמרים המצורפים.

ולבסוף אזהרה: הוראה מבוססת אינטואיציה, ומעבר הדרגתי מהאינטואיציה לפורמליזם מהסוג המתואר לעיל, דורשת אינטראקציה הדוקה עם התלמידים, ואלתור מתמיד של איך להמשיך בכל שלב, המתבסס על מה שעולה מהתלמידים, כולל ניצול לטובה של מצבים מפתיעים ובלתי צפויים. סוג הוראה כזה דורש מיומנויות מתמטיות ופדגוגיות מיוחדות שלא תמיד נלמדות במסגרת הכשרת המורים הסטנדרטית.

חשובות על מערכת החינוך

תובנות רבות על מערכת החינוך בישראל רכש אורי בשנים שבהן עמד בראש מנהלת "מחר 98" (מה שהיה ידוע גם בשם דו"ח הררי). שולמית אלוני, עם כניסתה לתפקיד שרת החינוך, כינסה אנשי חינוך מובילים מרחבי הארץ כדי לשמוע רעיונות שיש להם לקידום מערכת החינוך. במהלך הפגישה אמר אורי שבפגישה הועלו הרבה רעיונות טובים ויפים, אבל זה לא ממש משנה, כי בסוף, בשלב היישום, משרד החינוך בלאו הכי יקלקל אותם. כנראה הערה זו, בשילוב נטויותיה של השרה, שהייתה אופוזיציונרית בטבעה, גרמו לה להזמין אותו למשרדה ולהציע לו לעמוד בראש המנהלת.

אורי מעיד על עצמו כי לאחר השנתיים שעבד בהן במשרד החינוך הוא יצא עם יותר ידע ותובנות על משרד החינוך וכיצד עובדת מערכת החינוך בארץ. לצערו, ואולי גם לצערנו, תובנות רבות לא היו משמחות. כפי שאפשר להבין יש לו הרבה ביקורת על מערכת החינוך ועל משרד החינוך. הביקורת שלו איננה על המורים או התלמידים. נהפוך הוא, לדעתו המורים והתלמידים הם בעצם הקורבנות של מערכת החינוך הזו, והם פועלים ככל יכולתם כדי "לשרוד" במערכת הזו, אבל לימוד המתמטיקה (מנקודת ראות של הבנת המתמטיקה ואהבתה) יוצא ניזוק. מה שכן, הוא מלא הערצה לאותם מורים שבתנאים הקשים הללו מצליחים בכל זאת לשאוב את הכוחות ולגלות מידה של יצירתיות. הוא טוען כי מערכת החינוך בעיקרה לא עוצבה רק משיקולים פדגוגיים ולטובת הילד, אלא במידה רבה משיקולים פוליטיים וסוציולוגיים, וכמו שהוא רואה את הדברים, לרוב מערכות החינוך בארץ ובעולם יש שתי מטרות עיקריות (לא מוצהרות): הראשונה לשמש כבייביסיטר של המדינה כדי שאנשים יוכלו לצאת לעבוד, והשנייה להכין מסות של תלמידים לבחינות הבגרות, ובשני האילוצים האלו קשה להשיג למידה מהותית של מתמטיקה. מסיבה זו גם שינויים ניכרים בדרכי הלמידה מתרחשים בעיקר בכיתות הנמוכות.

להעמקה נוספת, מצורפים כאן לינקים לארבעה מאמרים העוסקים בנושאים הנדונים בסקירה זו: (1) הוכחות מובנות; (2) הוכחות גנריות; (3) פרספקטיבות פסיכולוגיות על שגיאות נפוצות במתמטיקה; (4) דרכי גישור על הפער בין החשיבה האינטואיטיבית לאנליטית.

(המאמרים מס' 2 ו-3, לאחר שהתפרסמו כרגיל בכתבי עת מחקריים, נבחרו להיכלל בכרכים השנתיים של הוצאת אוניברסיטת פרינסטון "The best writing on mathematics" מהשנים 2014 ו-2010, בהתאמה).

לקריאת המאמרים יש להיכנס לדף הבית של פרופ' אורי לירון – הפקולטה לחינוך מדעי וטכנולוגי, הטכניון, חיפה: <http://edu.faculty-ms.technion.ac.il/members/uri-leron>

(יש לגלול לתחתית הדף וללחוץ על הכפתור Selected Publications).