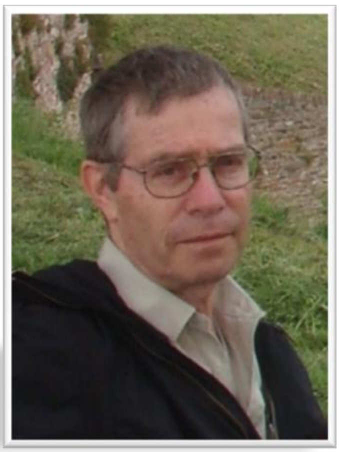
מדור חדשות מתמטיות

An Enormous theorem משפט ענק

נצה מובשוביץ-הדר ודוד צילג



פרופ׳ דוד צילג ז״ל
(2012-1946)

היה פרופסור מן המניין בפקולטה למתמטיקה בטכניון שנים רבות.
סיים תואר ראשון ושני במתמטיקה באוניברסיטת תל אביב ודוקטורט באוניברסיטת אילינוי באורבנה-שמפיין.
עבודת הדוקטורט שלו הייתה בתורת החבורות הסופיות, נושא חשוב ומרכזי באלגברה.
התקבל לסגל הפקולטה למתמטיקה בשנת 1975.
מעבר למחקריו הוא היה מרצה פופולרי ומוערך - מאז הנהגת סקר המרצים בטכניון, זכה באופן קבוע בתואר ״מרצה מצטיין״.
למחקריו במתמטיקה יצאו מוניטין בארץ ובעולם כולו.
הוא נפטר לאחר מאבק ממושך וקשה במחלת הלימפומה.

פתח דבר

הכתבה הזאת נכתבה כשנתיים לאחר פטירתו בטרם עת של המרצה המהולל ואיש תורת החבורות פרופ' דוד צילג ז"ל והיא מוקדשת להנצחת זכרו. שקפים ובהם תמצית המתמטיקה, שהציג בהרצאתו על המשפט הענק במסגרת המועדון המתמטי של הטכניון בשנת 2011, הופקדו בידי כדי לעבד על פיהם מאמר למורים ולמורי-מורים בנושא. למרבה הצער לא הספקנו לעשות זאת יחד. חשתי חובה לסיים את המתוכנן.

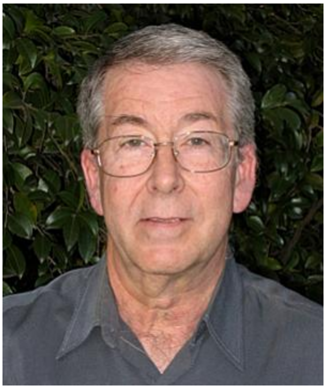
אני מודה לאלה מעמיתינו אשר סייעו לי בכך,[1] ועם זאת, לוקחת על עצמי, כמובן, את כל האחריות לדברים שנותרו לא לגמרי ברורים או אולי אף שגויים.

נצה מובשוביץ-הדר

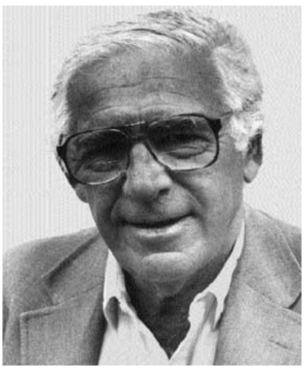
1. תודתי נתונה לעמיתים שקראו מהדורות קודמות של המאמר וסייעו בהעמדת המהדורה הנוכחית, בראש ובראשונה לפרופ' יואב בנימיני ולד"ר אלה שמוקלר, ועמהם גם (בסדר א"ב של שם המשפחה) לד"ר חמוטל דוד, לפרופ' איליה סיניצקי ולפרופ' אלן פינקוס. התמונה – באדיבותה של נלה צילג תבדל"א.

הקדמה

ההגדרה של חבורה היא פשוטה למדי: קבוצה עם פעולה בינרית אחת בעלת תכונות די טבעיות ומוכרות. מעצם פשטותה וטבעיותה של ההגדרה נובע קיומו של עושר גדול מאוד של חבורות שונות זו מזו בהרכבן ובגודלן, גדול עד כדי כך שאין כל סיכוי למיין אפילו את *הסופיות* שביניהן.



Michael Aschbacher
(born1944)
https://alumni2013.caltech.edu/system/datas/255/original/Aschbacher.jpg?1317401415



Daniel Gorenstein
1923-1992
http://apprendre-math.info/history/photos/Gorenstein_2.jpeg

עם זאת, מתברר שיש בין החבורות הסופיות משפחה של חבורות שנקראות חבורות *פשוטות*, שכן ניתנות למיון. לחבורות הפשוטות יש חשיבות רבה מכיוון שבמובן מסוים אפשר לבנות בעזרתן את *כל* החבורות הסופיות, באופן שמזכיר במידת מה את העובדה שבעזרת המספרים הראשוניים החיוביים אפשר לבנות את כל המספרים הטבעיים הגדולים מ-1. "המשפט הענק", נשוא כתבה זאת, נותן *מיון שלם* של כל החבורות הסופיות הפשוטות! באופן כזה נותן המשפט כלים לניתוח המבנה והתכונות של כל החבורות הסופיות.

ב-2 בנובמבר 2011, בטקס שהתקיים בשטוקהולם, שוודיה, הוענק פרס רולף שׁוֹק[2] בתחום המתמטיקה לפרופ' מייקל אַשְׁבָּכֶר מהמכון הטכנולוגי של קליפורניה CalTech, "על תרומותיו הבסיסיות לאחד הפרויקטים המתמטיים הגדולים ביותר בכל הזמנים, פרויקט המיון של חבורות סופיות פשוטות", ובלשון המקור:

> “...for his fundamental contributions to one of the largest mathematical projects ever, the classification of finite simple groups, notably his contribution to the quasi-thin case.” [3]

את התכנית לפרויקט המיון של חבורות סופיות פשוטות, שהוא אחד הגדולים והמורכבים שהמתמטיקה הטהורה ידעה מאז ומעולם, יזם והתניע בשנת 1972 המתמטיקאי האמריקאי פרופ' דניאל גורנשטיין מאוניברסיטת רטגרס (Rutgers). מטרת הפרויקט הייתה לקשור את הקצוות בין מחקרים אלגבריים רבים שפורסמו מאמצע המאה העשרים ואילך על רקע עבודה שהחלה

2. פרסי רולף שׁוֹק (Rolf Schock Prizes) מחולקים אחת לשלוש שנים בתחומים: לוגיקה ופילוסופיה, מתמטיקה, האמנות החזותית ואמנויות המוסיקה. כל פרס עומד על סך של 400,000 כתר שוודי (כ-60,000 דולר). הפרסים מוענקים על-ידי האקדמיה המלכותית השוודית למדעים, האקדמיה המלכותית השוודית לאמנויות יפות והאקדמיה המלכותית השוודית למוסיקה. באוקטובר 2014 הוענק הפרס למתמטיקאי היפני האמריקאי Yitang Zhang בעבור פריצת הדרך לקראת הוכחת השערת התאומים (ראו מדור החדשות המתמטיות בגיליון מס' 1).
3. לפירוט נוסף: http://www.kva.se/en/Prizes/Prize-winner-page/?laureateId=755

עוד במאה התשע-עשרה.

כעבור תשע שנים, בשנת 1981, מצא רוברט גרייס (Robert Greiss) את "חבורת המפלצת" (Monster group), שהיא חבורה פשוטה עם $8\cdot10^{53}$ אברים. לאחר גילוי זה יצא גורנשטיין בהכרזה חגיגית: "בחודש פברואר 1981 הושלם המיון של חבורות סופיות פשוטות".

ההכרזה על השלמת המיון, הנחשבת כיום לציון דרך במתמטיקה בת זמננו, נתקלה מלכתחילה בספקנות בקרב המומחים ולא זכתה לתהודה ציבורית מיוחדת. וכל כך למה? – בגלל הטבע השנוי במחלוקת של ההוכחה של משפט המיון, שהשתרעה על פני למעלה מ-10,000 עמודים, והתפזרה בין כ-500 מאמרים שפורסמו בכתבי-עת שונים ונכתבו על-ידי למעלה מ-100 מחברים שונים מכל רחבי העולם. זהו מקרה חסר תקדים בהיסטוריה של המתמטיקה.

במידת מה צדקו הספקנים – אכן התברר שההוכחה טעונה תיקונים פה ושם, דבר שנעשה בעיקר בין השנים 1995-2004.

תרומתו הגדולה של מייקל אשבכר הייתה תולדה של שבע שנות עבודה, שבהן הוציא יחד עם עמיתו, סטיבן סמית, שני ספרים נוספים בני 1300 עמודים בערך על פתרון הסוגיה, עד שבשנת 2004, כתב אשבכר: "למיטב ידיעתי המשפט העיקרי [של עבודתנו] סוגר את הפער האחרון בהוכחה המקורית, ולכן (נכון לרגע זה) טענת המיון יכולה להיחשב למשפט".

מהו בדיוק המשפט המדהים שדורש הוכחה באורך עצום שכזה ומורכבות כה גדולה? מה הן בכלל "חבורות סופיות פשוטות"? מה זה אומר "למיין" אותן? ומהי החשיבות של מיון כזה?

ננסה לשפוך מעט אור על השאלות האלו.

1. מה הן "חבורות סופיות פשוטות"?

נפרק את השאלה לשלושת מרכיביה: תחילה נזכיר מהי חבורה, אחר כך – מהי חבורה סופית, ולבסוף נעשה היכרות עם חבורה סופית פשוטה.

כידוע, *חבורה* היא קבוצה לא ריקה G, שבין כל שניים מאיבריה מוגדרת היטב פעולה בינרית, שאותה נסמן על-ידי $*$, ומתקיימות ארבע הדרישות הבאות:

סגירות: $a,b\in G\Rightarrow a*b\in G$.

אסוציאטיביות: $a,b,c\in G\Rightarrow (a*b)*c=a*(b*c)$.

קיום איבר ניטרלי: קיים ב-G איבר $e\in G$ המקיים $a*e=e*a=a$ לכל $a\in G$.

קיום איבר הפכי: לכל $a\in G$ קיים ב-G איבר הפכי $a^{-1}\in G$, המקיים $a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$.

הערה לתשומת-לב: הגדרת החבורה איננה כוללת דרישה לקיומו של חוק החילוף וכל ההמשך נכון לחבורות שהפעולה בין איבריהן היא לאו דווקא חילופית.

בשל פשטות הדרישות לקיומן של חבורות, הן מופיעות בענפי מתמטיקה רבים כמו גם בענפי מדע שונים: פיסיקה, כימיה, מדעי-המחשב ועוד רבים אחרים. המושג חבורה הוא מושג בסיסי המשמש

גם בבניית מושגים מתקדמים כמו חוג ושדה, ומושגים מתקדמים אחרים באלגברה מופשטת כגון מרחב וקטורי.[4]

הנה דוגמה פשוטה לכך שחבורות מופיעות באופן טבעי בשטחים שלכאורה אין קשר בינם לבין תורת החבורות.

נחשוב על קבוצת כל ההעתקות האיזומטריות של המישור על עצמו, אלו הן ההעתקות השומרות על מרחק (מכאן גם שמן הלועזי – איזו-מטריות) וכך הן שומרות על הצורה ומשנות רק את מקומה במישור. קבוצה זו מהווה חבורה ביחס לפעולת ההרכבה של שתי העתקות, כלומר ביחס לביצוע של העתקה בזו אחר זו (כדאי לבדוק!). נסמן אותה ב-G. דרך אחרת לומר ששני משולשים הם חופפים (כלומר בעלי שלוש צלעות חופפות בהתאמה ושלוש זוויות חופפות בהתאמה) היא שיש העתקה ב-G המעתיקה משולש אחד על השני. מתקבל על הדעת שהבנת המבנה האלגברי של G תתרום גם להבנת החפיפה של משולשים – ולמעשה של כל שתי צורות במישור. ואכן מתברר שיש אינפורמציה מלאה על המבנה הזה: כל אחד מאיברי G מתקבל על-ידי הרכבה של העתקות פשוטות משלושה סוגים בלבד: הזזות, שיקופים וסיבובים. המבנה של חבורת ההעתקות האיזומטריות במרחב התלת-ממדי ובמרחבים ממימד גבוה יותר, מסובך יותר ותכונותיה הן נושא שנחקר באופן אינטנסיבי גם כיום. מבנים מתמטיים הנשמרים על-ידי חבורת העתקות מתאימה, מופיעים בשטחים רבים במתמטיקה ובשימושיה (למשל בפיסיקה). הזיהוי והחקירה של חבורות כאלו תורמים לחקירת המבנים עצמם. זו הייתה נקודת הראות של פליקס קליין (1925-1849) כשפרסם ב-1872 את "תכנית ארלנגן" (Erlangen Program) שבה הציע למיין ולחקור את הגאומטריות השונות על-ידי "חבורות הסימטריות" שלהן, כלומר על-ידי חבורות ההעתקות השומרות על המבנים של הגאומטריות השונות.

חלק מהחבורות הן *אינסופיות*, כמו למשל קבוצת המספרים השלמים עם פעולת החיבור (שבה 0 הוא האיבר הניטרלי), או קבוצת המספרים הממשיים השונים מאפס עם פעולת הכפל (שבה 1 הוא האיבר הניטרלי); חלק אחר של החבורות הן *סופיות*, כלומר כאלו שבהן הקבוצה G מכילה מספר סופי של איברים, כמו למשל "קבוצת השעון" $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ עם פעולת החיבור-מודולו-12 (שבה 12 הוא האיבר הניטרלי).

במאמר זה נדון רק בחבורות סופיות ונסמן ב- $|G|$ את *הסדר* של החבורה, כלומר את מספר האברים בקבוצה G.[5] לדוגמה, לחבורת הסימטריות של הריבוע, שהן ההעתקות המעתיקות ריבוע על עצמו יש סדר 8: ארבעה סיבובים סביב נקודת החיתוך של שני האלכסונים (ב-90 מעלות, ב-180 מעלות ב-270 מעלות וב-360 מעלות) וארבעה שיקופים בכל אחד משני האלכסונים ומשני קווי האמצעים. פעולת החבורה היא פעולת ההרכבה – ביצוע בזו אחר זו של שתי העתקות

4. הגדרה של המושגים האלה אפשר למצוא בויקיפדיה בעברית בערכים "חוג" (מבנה אלגברי), "שדה" (מבנה אלגברי) ו"מרחב וקטורי".
5. הסימון ההולם של חבורה הוא $(G, *)$ כאשר G היא קבוצת איבריה ו-* היא הפעולה הבינרית המוגדרת ביניהם. למען הקיצור מקובל לסמן גם את החבורה ב- G ואת מספר איברי החבורה ב-$|G|$.

כאלו – והאיבר הניטרלי, העתקת הזהות, הוא הסיבוב ב-360 מעלות.[6]

לפני שנשיב לשאלה מהי חבורה "פשוטה" – נדון בתת-חבורות. תת-קבוצה H של חבורה סופית G מהווה תת-חבורה אם היא סגורה ביחס לפעולת החבורה. כך למשל בדוגמה האחרונה ארבעת הסיבובים מהווים תת-חבורה מסדר 4. תת-חבורה מסדר 2, למשל, מורכבת מהעתקת הזהות ומאחד השיקופים. העובדה שהסדרים של תת-החבורות האלו הם מחלקים של 8 אינה מקרית. משפט לגראנז' קובע שהסדר של כל תת-חבורה מחלק את הסדר של החבורה.[7] ראוי לציין כי לכל חבורה יש שתי תת-חבורות "טריוויאליות": החבורה כולה ותת-החבורה המכילה רק את האיבר הניטרלי.

לצורך ההגדרה של חבורה *פשוטה* נצטרך להגדיר תחילה תת-חבורות מסוג מיוחד, הנקראות תת-חבורות *נורמליות*: תת-חבורה H של G נקראת *נורמלית* אם לכל איבר h ב-H ולכל איבר g ב-G גם האיבר $g*h*g^{-1}$ נמצא ב-H.[8] שתי תת-החבורות הטריוויאליות של כל חבורה הן כמובן נורמליות, לכן לכל חבורה יש לפחות שתי תת-חבורות נורמליות. מובן מאליו כי בחבורה חילופית כל תת-חבורה היא נורמלית. וכעת, אנחנו מוכנים להגדרה: חבורה G נקראת "*פשוטה*" אם אין לה תת-חבורה נורמלית פרט לשתי הטריוויאליות.

מתברר שהחבורות הסופיות *הפשוטות* הן אבני הבניין של *כל* החבורות *הסופיות* באורח דומה (אם כי מסובך בהרבה) לאופן שבו המספרים הטבעיים הראשוניים הם אבני הבניין (הכיפלי) של כל המספרים הטבעיים.

כדי להסביר זאת יש צורך במושג נוסף: "*חבורת מנה*". לא נוכל להיכנס לפרטי ההגדרה של מושג זה במסגרת המאמר הנוכחי, אך נציין כי לכל חבורה G ולכל תת-חבורה נורמלית שלה H אפשר להגדיר חבורה חדשה – חבורת המנה G/H. מהכרת המבנה של תת-החבורה H ושל חבורת המנה G/H מקבלים אינפורמציה רבה על המבנה של החבורה G.[9] משפט בסיסי בתורת החבורות שהוכח בסוף המאה התשע-עשרה הוא משפט ג'ורדן-הלדר (Jordan-Hölder), המהווה הכללה מרחיקת-לכת של המשפט היסודי של האריתמטיקה (משפט הפריקות החד-ערכית של המספרים הטבעיים לגורמים ראשוניים), וקובע כי בכל חבורה סופית יש סדרה עולה של תת-חבורות: $H_1, H_2,\ldots, H_n$ המוכלות זו בזו כך ש- H_{i} היא תת-חבורה *נורמלית* של $H_{(\mathrm{i}+1)}$ וכך שחבורות המנה $K_i=H_{(i+1)}/H_i$ הן כולן חבורות פשוטות. יתר על כן, הסדרה $\{K_i\}$ היא יחידה במובן שאם קיימת

6. הדוגמה האחרונה היא דוגמה לחבורה שאינה חילופית. דוגמאות נוספות של חבורות הן :
קבוצת התמורות של n איברים, ביחס לפעולת ההרכבה (זוהי חבורה לא חילופית לכל $n>2$).
קבוצת שורשי היחידה מסדר n, כלומר השורשים המרוכבים של המשוואה $z^n=1$ עם פעולת הכפל של מספרים מרוכבים.
קבוצת 7 הטיפוסים של קישוטי-פס עם פעולת ההרכבה (ראו: מובשוביץ-הדר, נ' (2005). טרנספורמציות, חבורות וסימטריה או מהו סוד הסדרה: 7, 17, 230, 4783. *עלה*, *35*, 56-68).
7. את הוכחת משפט לגראנז' אפשר למצוא בויקיפדיה תחת הערך "משפט לגראנז' (תורת החבורות)".
8. לא נוכל להתייחס כאן ביתר פירוט לתכונות ולחשיבות של תתי-חבורות נורמליות. הקוראים המעוניינים יוכלו למצוא על כך בין היתר בערך "תת-חבורה נורמלית" בויקיפדיה העברית.
9. הקוראים המעוניינים בהרחבה ובהעמקה על הקשר בין חבורת המנה לתת-חבורה נורמלית יוכלו למצוא על כך בין היתר בערך "חבורת מנה" בויקיפדיה העברית.

סדרה אחרת של חבורות מנה $\{L_i\}$, שהתקבלה באותה דרך, וכולן פשוטות, אז כל אחת מהן איזומורפית[10] לאחת ורק אחת מחבורות המנה בסדרה $\{K_i\}$, במילים אחרות, הסדרות אינן שונות זו מזו למעט אולי הסדר בין איבריהן. משפט ג'ורדן-הלדר מצביע על קשר הדוק בין חבורות סופיות לחבורות סופיות פשוטות.

הסקרנות של המתמטיקאים המתמחים בתורת החבורות למפות ולמיין את החבורות הסופיות *הפשוטות* נבעה מהרצון לעמוד על תכונותיהן של החבורות הסופיות כולן, בדומה לסקרנות של המתמטיקאים המתמחים בתורת המספרים לגבי המספרים הטבעיים הראשוניים שנבעה מהמגמה לעמוד על תכונותיהם של המספרים הטבעיים כולם.

2. מה זה אומר "למיין" את החבורות הסופיות הפשוטות?

הטיפול במיון של משולשים בעזרת החפיפה של שני משולשים זה לזה במישור, הוא דוגמה לטיפול בבעיית "מיון": כששני משולשים מתקבלים זה מזה על-ידי העתקה איזומטרית, הם לא נחשבים לשונים לצורך ניתוח תכונותיהם. כשמדובר במיון של חבורות, לא נבחין בין שתי חבורות אם הן איזומורפיות זו לזו.

משפט המיון של החבורות הסופיות הפשוטות, שהוכחתו הושלמה לא מזמן, כאמור, מציג רשימה של *כל* החבורות הסופיות הפשוטות השונות זו מזו ורק הן. כלומר אין ברשימה שתיים שהן איזומורפיות זו לזו וכל חבורה פשוטה איזומורפית לאחת החבורות ברשימה.

נכיר דוגמאות אחדות מהרשימה.

כידוע, כל חבורה סופית G שמספר איבריה $|G|=p$ הוא ראשוני, איזומורפית לחבורה $Z_p=\{0,1,2,..., p-1\}$ עם פעולת החיבור-מודולו-p (כמו, למשל, החבורה של שבעה ימי השבוע). היות ו-p ראשוני אין לו מחלקים לא טריוויאליים, לכן על פי משפט לגראנז', אין ל- Z_p תת-חבורות לא טריוויאליות. במיוחד אין לחבורה זו תת-חבורות נורמליות לא טריוויאליות – ולכן היא פשוטה! היות ויש אינסוף מספרים ראשוניים, לפנינו בעצם משפחה אינסופית של חבורות סופיות פשוטות. ברשימה לא נפרט, כמובן, את (אינסוף) החבורות האלו – אלא נשתמש בהגדרתן הכללית באמצעות הפרמטר p. זוהי משפחה שלמה (אינסופית) של חבורות, המשפחה הראשונה ברשימת החבורות הסופיות הפשוטות. ייחודה של משפחה זו הוא בכך שחבורות אלו הן החבורות הפשוטות החילופיות היחידות.

הצעד הבא הוא ניסיון לאתר חבורות סופיות פשוטות נוספות *שאינן* איזומורפיות ל-Z_p. האם קיימות חבורות נוספות כאלו?

10. אומרים על שתי חבורות שהן איזומורפיות זו לזו אם ורק אם קיימת בין איבריהן העתקה חד-חד ערכית g אשר שומרת על הפעולה, כלומר, התוצאה של הפעולה x בין כל שני איברים a, b בחבורה אחת, מועתקת על-ידי g לתוצאה של הפעולה* בין תמונותיהם $g(a)$ ו-$g(b)$ בחבורה השנייה, או בקיצור: $g(axb) = g(a)*g(b)$. שתי חבורות כאלו "מתנהגות" באותו אופן ואף שהן לא זהות, הן אינן נחשבות לשונות כשבאים למיין את החבורות הסופיות הפשוטות למיניהן.

התשובה היא חיובית.

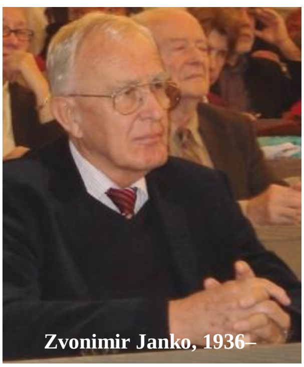
סך הכול התגלו 18 משפחות אינסופיות *שונות* (לא איזומורפיות) של חבורות סופיות פשוטות. חבורות אלו נתגלו בין השנים 1800 ל-1960 על-ידי מתמטיקאים שונים ביניהם: גלואה (Galois), ג'ורדן (Jordan), דיקסון (Dickson), שבליי (Chevalley), טיטס (Tits) וסוזוקי (Suzuki).

מאז 1960 לא נתגלו משפחות חדשות.

נוסף למשפחות האינסופיות נמצאו מספר חבורות שלא היו שייכות לאף אחת מ-18 המשפחות. כדי להדגים זאת נתבונן בשתי מטריצות ריבועיות מסדר 11x11:

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\end{pmatrix}$$

באמצע המאה התשע-עשרה, גילה מתמטיקאי צרפתי בשם אמיל מתיו[11] (Émile Mathieu, 1835-1890), כי אם מבצעים את כל המכפלות האפשרויות של A ו-B (עם חזרות, למשל $AB^3A^7BABA^8$) מקבלים קבוצה של מטריצות המונה $11\cdot10\cdot9\cdot8=7920$ וקבוצה זו היא חבורה פשוטה (וכמובן לא חילופית). לימים התברר כי היא אינה שייכת לאף אחת מ-18 המשפחות ברשימה שהתגלתה וניתן לה השם M_{11} על שם המגלה שלה.


Zvonimir Janko, 1936–

באופן דומה גילה אמיל מתיו עוד ארבע חבורות פשוטות, והוכיח שאינן שייכות לאף אחת מ-18 המשפחות. אף הן נקראו על שמו: M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}. כיוון שאינן שייכות לאף אחת מ-18 המשפחות הנזכרות, הן נקראות *ספורדיות* (sporadic – לא סדיר). חבורות אלו ניתנות להצגה כחבורות של פרמוטציות על 11, 12, 22, 23, 24 עצמים בהתאמה.

עשרות שנים עברו מאז שמתיו נפטר ואיש לא גילה חבורות פשוטות סופיות חדשות, עד שבשנת 1966 גילה מתמטיקאי יליד

11. עוד פרטים על אמיל מתיו אפשר למצוא כאן: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Mathieu_Emile.html

קרואטיה בשם זְבוֹנימיר יָנְקו[12] חבורה ספורדית חדשה. חבורה זו היא קבוצת כל המטריצות של 7x7 שהן מכפלה כלשהי (כגון $A^3BA^5B^6$) של שתי המטריצות הבאות מעל השדה F_{11} שבו 11 איברים:

זוהי חבורה פשוטה מסדר 175560 והיא נקראת על שם המגלה שלה: J_1.

במשך 10 השנים הבאות נתגלו עוד 20 חבורות סופיות פשוטות ספורדיות שנקראו על שם מגליהן. לא היה ברור כמה חבורות כאלו עוד יתגלו והאם מספרן סופי או אולי אינסופי. מכל מקום, בסוף שנות השבעים של המאה העשרים פסקה "מפולת הגילוי" של החבורות הספורדיות. אחרי ש"חבורת המפלצת" נתגלתה בשנת 1981, העלה דניאל גורנשטיין את הטענה שהרשימה של החבורות הסופיות הפשוטות מלאה וכי המשפט על מיון החבורות הסופיות הפשוטות אומר:

משפט המיון של החבורות הסופיות הפשוטות

I. הנה הרשימה **המלאה** של כל החבורות הסופיות הפשוטות:

א. 18 משפחות אינסופיות (בנות מנייה) של חבורות
[תיאור פרמטרי מדויק של כל אחת מהמשפחות]

ב. 26 חבורות ספורדיות
[תיאור מפורש של כל אחת מהחבורות]

II. כל חבורה סופית פשוטה איזומורפית לחבורה השייכת לאחת מ-18 המשפחות, או לאחת מ-26 החבורות הספורדיות.

בשל מגבלות המקום אי אפשר לנסח במסגרת זו את משפט המיון על כל פרטיו, ובוודאי שאי אפשר להציג את הוכחתו המשתרעת כאמור על מאות עמודים.[13]

לסיום, מהי החשיבות של מיון שכזה?

לאפשרות למיין יש חשיבות בהרבה נושאים מדעיים כמו למשל בכימיה (הטבלה המחזורית) – וגם במתמטיקה. מוכר, למשל, המיון של *כל* הפאונים המשוכללים. משפט המיון של החבורות הסופיות הפשוטות מספק רשימה *מלאה* של *כל* החבורות הסופיות הפשוטות. יש הבדלים מהותיים בין מיון החבורות הסופיות הפשוטות לבין מיון הפאונים. העיקרי שבהם הוא שרשימת הפאונים המשוכללים היא סופית: הארבעון, הקובייה, התמנון, התריסרון והעשרימון, ואילו רשימת החבורות הסופיות הפשוטות היא אינסופית. עוד, למשל, לא ברור אם הכרת הפאונים המשוכללים עוזרת בהבנת המבנה של פיאונים כלליים. לעומת זאת, החבורות הסופיות הפשוטות הן אבני

12. עוד על קורות חייו ועבודתו הפורייה של המתמטיקאי בן זמננו, זבונימיר ינקו, יליד 1936, אפשר למצוא באינטרנט: http://www.croatianhistory.net/etf/janko/#biography
התמונה מתוך http://www.irb.hr/var/ezflow_site/storage/images/dogadanja/ciklusi-predavanja/eminentni-znanstvenici-na-irb-u/prof.-dr.-sc.-zvonimir-janko/4612-1-cro-HR/Prof.-dr.-sc.-Zvonimir-Janko.jpg

13. יותר פרטים על רשימת המשפחות של החבורות הסופיות הפשוטות אפשר לראות בויקיפדיה באנגלית בערך: List of finite group.

הבניין של כל החבורות הסופיות, ולהכרתן יש חשיבות בניתוח המבנה של כל החבורות הסופיות.

למרות מספרן האינסופי של חבורות סופיות פשוטות, אנו מבינים היטב את מהותן, כי קיימים תיאורים מדויקים של 18 משפחות אינסופיות (כולן בנות מנייה) של חבורות סופיות פשוטות ומעבר ל-18 המשפחות האלו, יש עוד תיאור מדויק של 26 בודדות, וזהו זה! – אלה הן *כל* החבורות הסופיות הפשוטות והן "אבני הבניין" של *כל* החבורות הסופיות. אגב, מספר איבריה של *חבורת המפלצת* (*Monster group*), שהיא כאמור הגדולה שבין החבורות הספורדיות, מגיע לכ-$8\cdot 10^{53}$ וליתר דיוק ל-808,017,424,794,512,875,886,459,904,961,710,757,005,754,368,000,000,000.

האם בכך תם עידן תורת החבורות? האם המחקר בתחום זה הסתיים? – נהפוך הוא. במתמטיקה כל סיום הוא כידוע התחלה חדשה. גם כיום, מתמטיקאים רבים עובדים בתחום תורת החבורות ומשפט המיון הוא מכשיר חשוב בעבודתם.

אחד הכיוונים הוא, כמובן, ניסיון לפשט את ההוכחה של המשפט על מיון חבורות סופיות פשוטות. לפישוט כזה יש חשיבות לא רק בגלל האורך והסיבוך של ההוכחה הקיימת. יחד עם בדיקת האמיתות של טענה מתמטית, להוכחה מתמטית יש תפקיד נוסף: לפרש ולהבין את הקשרים בין הרכיבים השונים של הטענה המתמטית. כל הוכחה נוספת מהווה נדבך נוסף להבנה זו, והוכחה פשוטה יותר למשפט המיון תשפוך אור נוסף על משפט חשוב זה.

כיום מתנהלים מספר פרויקטים בשאיפה לפשט את כל החלקים של ההוכחה ולהביא אותה לפרסום במקום אחד. האיגוד האמריקאי למתמטיקה (American Mathematical Society), מוציא את התוצאות בסדרת ספרים. יש אומרים שעם השלמתה תמנה הסדרה 12 כרכים...

מקורות

צילג, ד' (2011). *ההוכחה הארוכה ביותר*. הרצאה שהוצגה במסגרת המועדון המתמטי של הטכניון, חיפה.

Classification of finite simple groups. (2014, July-November). In *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Retrieved from http://en.wikipedia.org/wiki/Classification_of_finite_simple_groups

Daniel Gorenstein. (2014, July-November). In *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Retrieved from http://en.wikipedia.org/wiki/Daniel_Gorenstein

Elwes, R. (2006, December 7). An enormous theorem: The classification of finite simple groups. *+plus magazine*. Retrieved from http://plus.maths.org/issue41/features/elwes/index.html

Janko group J1 (2014, July-November). In *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Retrieved from http://en.wikipedia.org/wiki/Janko_group_J1

List of finite simple groups. (2014, July-November). In *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Retrieved from http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_finite_simple_groups

List of finite simple groups. (2014, July-November). In *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Retrieved from http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_finite_simple_groups

Mathieu group (2014, July-November). In *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Retrieved from http://en.wikipedia.org/wiki/Mathieu_group

Michael Aschbacher, Shaler Arthur Hanisch Professor of Mathematics. (2014, July-November). Retrieved from http://www.math.caltech.edu/people/asch.html

Michael Aschbacher. (2014, July-November). In *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Retrieved from http://en.wikipedia.org/wiki/Michael_Aschbacher

Monster group (2014, July-November). In *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Retrieved from http://en.wikipedia.org/wiki/Monster_group

Rolf Schock Prize. (2014, July-November). In *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Retrieved from http://en.wikipedia.org/wiki/Rolf_Schock_Prize

Roney-Dougal, C. (2006, May 6). The power of groups. *+plus magazine*. Retrieved from http://plus.maths.org/content/power-groups?src=aop

Sporadic simple groups (2014, July-November). In *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Retrieved from http://en.wikipedia.org/wiki/Sporadic_simple_groups

פרופ׳ (אמריטוס) נצה מובשוביץ-הדר

הקימה בשנת 1977 את ״**קשר חם**״ - מרכז מו״פ ל**ק**ידום **ש**יפור ו**ר**יענון ה**ח**ינוך ה**מ**תמטי ומנהלת אותו מאז. עמדה בראש המחלקה להוראת המדעים בטכניון - מכון טכנולוגיה לישראל, ניהלה את המוזיאון הלאומי למדע בחיפה, הנהיגה צוותי כתיבה של תוכניות לימודים חדשניות, ביניהן סדרת המשדרים הדרמתיים ״חשבון פשוט״ שהופקה על-ידי הטלוויזיה החינוכית וזכתה לפרסים בינלאומיים. פרופ׳ מובשוביץ-הדר פרסמה מאמרים רבים ושני ספרים, והעמידה דור של מורים למתמטיקה ותלמידי מחקר החדורים בשאיפה לקרב את המתמטיקה אל לבו של הנוער. בשנים האחרונות היא נהנית ממתן סדרת הרצאות במתמטיקה לציבור הרחב.