תפיסת המושגים ׳קושי׳ ו׳אתגר׳ בבעיות מתמטיות שגרתיות ולא שגרתיות, בתנאים שונים של מעורבות עם הבעיות

מארק אפלבאום, המכללה האקדמית לחינוך ע״ש קיי, באר-שבע

תקציר

בשנים האחרונות התפרסמו מאמרים מחקריים רבים העוסקים בחשיבות האתגר בהוראה. לרוב דנים המאמרים האלה בשיטות ההוראה המתאימות לתלמידים, בהכשרה הנדרשת מהמורים ובתפיסות של המורים, ואינם מתמקדים בנקודת המבט של התלמידים. מחקר זה עוסק בנקודת מבט זו. מטרתו ללמוד באופן ראשוני מהם הגורמים המשפיעים על תפיסות התלמידים בעניין הקושי של משימה מתמטית והאתגר שהיא מציבה. במחקר תופעלו שני משתנים:

א. שגרתיות הבעיה המתמטית – בעיות שגרתיות המתבססות על תכנית הלימודים של משרד החינוך ובעיות לא שגרתיות, בעלות גוון של חידות ואינן נגזרות מתכנית הלימודים.

ב. מידת המעורבות של התלמיד בפתרון הבעיה – מצבים של מעורבות נמוכה (קריאת בעיות מתמטיות בלי ניסיון לפתור אותן ופתרון בהנחיית מורה) ומצב של מעורבות גבוהה (פתרון עצמאי של הבעיה).

במחקר נבדק אם וכיצד מידת המעורבות של התלמידים בפתרון הבעיה משפיעה על תפיסות הקושי והאתגר; אם וכיצד מידת השגרתיות של השאלות משפיעה על תפיסות אלו, ואם יש השפעה משולבת למעורבות עם פתרון הבעיה ולשגרתיות על הבעיות על תפיסות האתגר והקושי. שאלות אלו נבדקו על מדגם של תלמידים הלומדים בכיתות ז' בבתי-ספר **דוברי ערבית** בדרום הארץ. המחקר הוא מחקר "גישושי" באופיו.

ממחקר זה יהיה אפשר לגזור מסקנות ראשונות על הגורמים שעשויים להעלות את העניין של התלמידים בלימודי המתמטיקה ובכך לשמש בסיס למחקרי המשך ולשיפור הכשרת פרחי הוראה בנושא זה.

במחקר נמצא שכאשר מידת המעורבות של התלמידים בפתרון הבעיה הייתה גבוהה, הערכת הקושי והאתגר היו גבוהים יחסית למצבים שבהם מידת המעורבות הייתה נמוכה. כמו כן המחקר הראה שבשלב הפתרון העצמאי, הבעיות הלא שגרתיות נתפסו קשות הרבה יותר מהבעיות השגרתיות. לעומת זאת, כאשר התלמידים התבקשו רק לקרוא את הבעיות מבלי לנסות לפתור אותן או שביצעו

פתרון מונחה על-ידי המורה, לא היה הבדל מובהק בין תפיסת הקושי של בעיות שגרתיות לבין תפיסת הקושי של בעיות לא שגרתיות.

המחקר מצביע על כך ששאלות לא שגרתיות בעלות גוון חידתי עשויות להעלות את העניין בלימודי המתמטיקה בקרב התלמידים. במובן זה תוצאות המחקר מרמזות על יתרון של שילוב משימות כאלה בשיעורי המתמטיקה בבית-הספר ובהכשרת פרחי הוראה לכך.

מילות מפתח: *אתגר; קושי; בעיות לא שגרתיות.*

1. הרקע למחקר

במסגרת הכשרת פרחי הוראה במתמטיקה נשאלתי לא פעם אילו שאלות מתמטיות מאתגרות תלמידים במיוחד, ואילו שאלות הופכות את ההוראה לשגרתית, ובכלל, אם תלמידים מבינים את ההבדל בין המושג "קושי" למושג "אתגר".

אתגר וקושי הם מושגים סובייקטיביים: פירושה של המילה "אתגר" לפי מילון אבן שושן הוא: "הזמנה להתמודדות, דבר או רעיון המגרים רצונו של אדם או של ציבור להתמודד אתם, להשיגם או להתגבר עליהם". האתגר מגרה אפוא להתמודדות.

"קושי", לפי אבן שושן, הוא "מכשול, מעצור, חומרה, דבר המכביד על פעולה". אך ייתכן שבתפיסתם של התלמידים יש קשר חזק בין שני המושגים האלה: אתגר מזמן קושי. אין ספק שלמשימות מתמטיות מאתגרות יש תפקיד חשוב מאוד בהפיכתו של מקצוע המתמטיקה למרתק ול'ידידותי' יותר לתלמידים.

באופן כללי ברור שהצבת אתגר לתלמידים בהוראה בכלל ובהוראת המתמטיקה בפרט היא גורם חשוב בפיתוח הידע שלהם. הספרות בנושא עוסקת בשנים האחרונות בהיבטים חשובים מזווית הראייה של המורה, של ההוראה ושל הכשרת המורים. אילו משימות וחומרים מאתגרים יותר מאחרים? כיצד לבנות משימות כאלה? כיצד להכשיר מורים לשלב משימות מאתגרות בשיעור? מהן תפיסות המורים כלפי סוגיית האתגור? ועוד (Leikin, 2004; Applebaum & Leikin, 2007; Barbeau & Taylor, 2009). תקצירים של הכנסים: ICMI -16, ICME 11, CMEG - 5, CMEG - 4,

עד כה לא פורסמו מחקרים שעוסקים בנקודת המבט של התלמידים – כיצד הם תופסים את האתגור? מהם הגורמים שמשפיעים על תפיסת האתגר מנקודת מבטם? במחקר הזה ניסינו לפתוח צוהר אל השאלות האלה, ובזה מתבטאת חדשנותו.

חשיבות האתגר בהוראת המתמטיקה

ג'וורסקי (Jaworski, 1992, 1994) טוענת כי מרכיבי הליבה של ההוראה הם האתגר המתמטי, הרגישות כלפי התלמידים וניהול הלמידה. כדי לפתח הבנה מתמטית, המורה חייב ליצור מצבים שדורשים מאמץ מנטלי מן התלמידים. האיכות של הוראת המתמטיקה בכיתה נקבעת על-ידי המשימות

המתמטיות שהמורה בוחר להציג לתלמידים, ועל-ידי הדרכים שבהן הוא מציג את המשימות האלה (Steinbring, 1998 ;Simon, 1997). לפי ברוסאו (Brousseau, 1997) בעיה מתמטית טובה מזמנת בניית ידע מתמטי אצל התלמידים על-ידי התגברות על קשיים מתמטיים, חיפוש כלים מתמטיים מתאימים, יישום אפקטיבי של הכלים האלה, הערכה ביקורתית של הפתרונות ויצירת בעיות חדשות הקשורות לבעיה הנתונה.

ידוע כי מורים רבים בוחרים משימות קונבנציונליות לשיעורים שלהם ומנחים את התלמידים למצוא פתרונות סטנדרטיים (Leikin & Levav-Waynberg, 2007). קוני (Cooney, 2001) מציין שאי אפשר לפתח אצל הלומדים עניין במתמטיקה על-ידי שימוש במשימות הדורשות הפעלת אלגוריתמים בלבד. שימוש בפעילויות מתמטיות מאתגרות אינו תנאי מספיק להפקת התועלת המרבית מהן בכיתה. לשם כך על המורים להבין את היתרונות שבשימוש במשימות מאתגרות ולהשתכנע בחשיבות השימוש במשימות כאלה בהוראה ובלימודי המתמטיקה. עליהם "להרגיש בטוחים" מבחינה מתמטית ופדגוגית, כאשר מדובר בסוג זה של משימות במתמטיקה.

בחירה של משימות מתמטיות מאתגרות כשהיא לעצמה משימה לא פשוטה: בראש ובראשונה היא דורשת לדעת איזה סוג של משימות מאתגרות את התלמידים ובאיזה שלב של הלמידה נכון לתת אותן לתלמידים. ברור ש"משימה מאתגרת" היא מושג סובייקטיבי ויכול להשתנות מתלמיד לתלמיד. על המורה להכיר את השונות בין תלמידיו ולנהל את הלמידה כך שהאתגרים יותאמו לצרכים של כל תלמיד כדי שכל התלמידים יהיו מאותגרים בשיעור. ברור כי למרות השוני בין התלמידים, ייתכן שלכמה מהם תהיה תפיסה דומה ביחס לרמת האתגור של אותן המשימות המתמטיות. על המורה להכיר את הדפוסים האלה כדי שלימוד המתמטיקה יעניין את תלמידיו (Krainer, 2001).

נוסף על הכרת דפוסי החשיבה ומציאת הדפוסים הדומים אצל תלמידים חשוב לבדוק אם המושג "אתגר" מתקשר בתפיסתו של התלמיד למושג "קושי", ואם כן – באיזו מידה. האם משימה קשה היא בהכרח מאתגרת? או שמא משימה קשה מרפה את ידיהם של התלמידים וגורמת להם שלא ירצו להתמודד עמה. מידע זה עשוי להשפיע על קבלת ההחלטות של המורים בבחירת המשימות להוראה.

אי אפשר לבנות את הוראת המתמטיקה רק על משימות לא שגרתיות. שילוב מושכל של המשימות האלה עם המשימות השגרתיות חייב להיות במינון המתאים לאוכלוסיית היעד ולתכנית הלימודים. האם שאלות לא שגרתיות מאתגרות את התלמידים יותר משאלות שגרתיות? זאת אחת השאלות שהמחקר הזה מבקש להשיב עליה.

התמודדות עם משימות מאתגרות עוזרת לתלמידים להכיר את כישוריהם, שהרי התלמיד אינו יודע אם יצליח במשימה מאתגרת לפני שימצא את פתרונה (ולרוב אין ברשותו אלוגריתם שעליו הוא יכול להישען). קזמי וסטילמן ועמיתיו (Kazemi, 1998; Stillman et al., 2009) טוענים שכאשר תלמידים עוסקים בפתרון בעיות מאתגרות הם נמצאים על הגבול שבין התחום שבו הם מרגישים נוח לבין התחום שבו הם 'מסתכנים'.

"אתגרים משפרים את יכולתם של התלמידים להתמודד עם בעיות לא צפויות בחיי היום-יום, והצלחתם בכך מכינה אותם לחיים האמיתיים" (Stillman et al., 2009, p. 246).

סטילמן ועמיתיו (Stillman et al., 2009) מוצאים יתרון נוסף במשימות מאתגרות: הן מאפשרות לתלמידים לפתח הבנה שלמה יותר של מושגים מתמטיים. יתרה מזו המשימות המאתגרות מזמנות, לטענתם של פאוול ועמיתיו (Powell et al., 2009), הבניית ידע חדש ולא רק הפעלת אלגוריתמים ידועים מראש.

יש אפוא הסכמה רחבה על הצורך לשלב משימות מאתגרות במתמטיקה, אך אין הוראות לדרך הבחירה של המשימות ולהתאמתן לאוכלוסיות התלמידים.

תפיסות של המורים

אם המורים ידעו איך תלמידים תופסים את המושג 'אתגר', הם יוכלו להפוך את ההוראה שלהם למאתגרת יותר ולמשמעותית יותר. בעקבות הסיווג של שולמן (Shulman, 1986) של סוגי הידע של המורים, אנו רואים שהתפיסות של המורים כוללות תפיסות מתמטיות, תפיסות פדגוגיות ותפיסות שיש להם על תכנית הלימודים. הדרך שבה הם תופסים את האתגר המתמטי היא מרכיב אינטגרלי בידע המטה-מתמטי שלהם ובידע המתמטי שבו הם משתמשים בהוראה (Ball, Hill & Bass, 2005). התפיסות הפדגוגיות של המורים את האתגר המתמטי משקפות את מודעותם לתפקידו של האתגר המתמטי בהוראת המתמטיקה ובלמידתה ובמערכת היחסים בין הידע המתמטי, הכישורים והמיומנויות של התלמידים מצד אחד לבין רמת הקושי המתאימה של בעיה מתמטית מצד שני. חשוב שהמושג 'אתגר מתמטי' יהיה מושרש בפעילות, בידע ובאמונות שלהם. תפיסות אלו משפיעות על האופי ועל המבנה של המשימות המתמטיות.

את העמדות של המורים כלפי המושג 'אתגר המתמטי' חקרו לאחרונה אפלבאום ולייקין (Applebaum & Leikin, 2007), וגוברמן ולייקין (Guberman & Leikin, 2013). בעבודות אלה נמצא שאצל המורים יש כיסוי כמעט מלא של כל הסוגים של בעיות מאתגרות אשר הוגדרו בספרות מקצועית (Barbeau & Taylor, 2009).

במחקרם של אפלבאום ולייקין (Applebaum & Leikin, 2007), נבדקו עמדות המורים כלפי מושג 'השאלה המאתגרת'. במחקר נמצא כי המורים השתמשו בתוכן המתמטי של הקורסים שלמדו ואותגרו בעצמם. השימוש של המורים בתוכן של הקורסים הפדגוגיים בלט בדיון על הקשיים של התלמידים ועל התפיסות המוטעות שלהם.

המורים טענו כי כדי להציג לתלמידים משימות מתמטיות מאתגרות הם עצמם חייבים להרגיש בטוחים מבחינה מתמטית עם המשימות. המתאם החיובי שנמצא בין הצלחת המורים בפתרון הבעיות לבין הדרך שבה הם העריכו את האתגר המתמטי שהוצב בהן, מדגיש את חשיבותו של הידע המתמטי ושל מומחיות המורים בפתרון בעיות לאתגור מתמטי של התלמידים בכיתות.

במחקר זה התבקשו מורים לאפיין ולדרג בעיות מתמטיות (על סולם הנע בין 1 ל-12), אשר לדעתם אמורות לאתגר תלמידים בחטיבות הביניים. בנספח 3 להלן מוצג הדירוג הממוצע (כאשר ככל שהערך נמוך יותר, כך רמת האתגור גבוהה יותר) והאפיון של המשימות. אפשר לראות בממצאים כי המורים דירגו את השאלות האינטגרטיביות בדירוג הגבוה ביותר. הדירוגים הבאים היו (בסדר יורד): (1) בעיות הדורשות חשיבה לוגית; (2) בעיות שאפשר לפתור בדרכים אחדות; (3) בעיות חקר וגילוי; (4) בעיות לא סטנדרטיות; (5) בעיות שמזמנות הכללה מתמטית; (6) הוכחת טענות מתמטיות חדשות; (7) בעיות שדורשות בניות עזר; (8) מציאת טעויות בפתרון; (9) פרדוקסים; (10) נושאים שמחוץ לתכנית הלימודים; (11) בעיות ובהן פרמטרים.

הממצאים האלה חשובים, אך חשוב לבדוק גם את עמדות התלמידים כלפי המושג 'אתגר' כיוון שהנושא טרם נבדק באופן אמפירי. ייתכן שיימצאו הבדלים בין תפיסות המורים לתפיסות התלמידים ביחס למושג המשימה המאתגרת.

בהסתמך על עבודות של צ'רלס ולסטר (Charles & Lester, 1982), לייקין (Leikin, 2004), שונפלד (Schoenfeld, 1985) ופוליה (Polya, 1973) אפשר לסכם ולומר כי משימה מאתגרת היא כזו המעוררת מוטיבציה להתמודד אתה; שאין לה פתרון מידי; שדורשת ניסוי; שיש כמה דרכים לפתרונה. עם זאת, לייקין (Leikin, 2004) ציינה כי אין לקריטריונים אלה אופי אוניברסלי: בעיה יכולה לאתגר תלמיד אחד ולא לעניין תלמיד אחר:

> "Obviously, these criteria are relative and subjective with respect to a person's problem-solving expertise in a particular field, i.e. the task that is cognitively demanding for one person may be trivial (or vice versa) for another" (Leikin, 2004, p. 209).

משימות מתמטיות במחקר

בבחירת הבעיות למחקר הנוכחי הסתמכתי על ממצאי המחקר של אפלבאום ולייקין (Applebaum & Leikin, 2007) תוך התאמת המשימות לתלמידים בכיתה ז' (שהיוו את המדגם במחקר זה). שש הבעיות המתמטיות שנבחרו למחקר (ראו נספח 2) הן מתחומים שמורים סברו שהם מאתגרים ביותר לפי הדירוג שצוין למעלה: (1), (2), (3), (4), (5) ו-(6). לחלק מהבעיות שנבחרו יש יותר מאפיון אחד. לדוגמה, שאלה מתמטית מס' 1 במחקר מאופיינת כך :(2), (4), (5), (11); ושאלה מס' 3 מאופיינת כך: (1), (3), (4), (6).

באופן כללי, הבעיות 1, 2 ו-4 נחשבו למשימות לא שגרתיות, אשר אינן נכללות בתכנית הלימודים, בעלות גוון חידתי ודורשות מיומנויות חשיבה מסדר גבוה. משימות כאלה יכולות להתאים לתלמידים הלומדים בכיתה ז'. הבעיות 3, 5 ו-6 היו שאלות שיש להן הלימה עם תכנית הלימודים והן דומות לאלה שבספרי הלימוד העדכניים. כל שש הבעיות היו חדשות לתלמידים.

השערות המחקר:

מטרת המחקר הייתה לבחון את תפיסות התלמידים כלפי אתגר וקושי בהקשר של גורמים אחדים העשויים להשפיע על תפיסתם. שני הגורמים שבחרנו לעסוק בהם הם מידת המעורבות של התלמיד בפתרון הבעיות ומידת השגרתיות של הבעיה (שגרתית או לא). שיערנו כי תלמידים שייתקלו בבעיה הקשה להם יותר, יעריכו שהיא גם מאתגרת יותר. עם זה קיווינו שהתלמידים יבחינו בין שני הגורמים ולא יכרכו אותם זה בזה (כלומר קיווינו שלא לקבל מתאם קרוב ל-1 בין הערכת קושי הבעיה להערכת מידת האתגור שבה).

עוד שיערנו כי בעיות לא שגרתיות ייתפסו מאתגרות יותר וגם קשות יותר, וכי מידת המעורבות של התלמידים בבעיה אף היא תשפיע באותו הכיוון הן על תפיסת הקושי והן על תפיסת האתגר. כלומר ככל שהתלמידים יהיו מעורבים יותר בפתרון הבעיה באופן אקטיבי ועצמאי, כך היא גם תהיה להם קשה יותר וגם מאתגרת יותר.

מאחר שהיה סביר להניח שבעיות לא שגרתיות ייתפסו כקשות יותר ולכן גם מאתגרות יותר מבעיות לא שגרתיות, שיערנו כי יתקבלו אינטראקציות מובהקות בין מידת המעורבות ומידת השגרתיות של הבעיה, בהשפעתן על תפיסת הקושי והן על תפיסת האתגר.

2. שיטה

2.1 המדגם

במדגם השתתפו 73 תלמידים, 45 בנות ו-26 בנים (שני תלמידים לא ציינו את מינם) – משלוש כיתות ז' הלומדים בבתי-ספר דוברי ערבית בדרום הארץ. כל כיתה לומדת בבית-ספר אחר.

2.2 מהלך המחקר

המחקר התנהל בשלושה שלבים שנבדלו האחד מהשני במידת המעורבות של התלמידים בפתרון הבעיה. שלושת השלבים נערכו באותו יום.

לפני השלב הראשון של המחקר התבקשו התלמידים למלא שאלון עמדות כלפי לימודי המתמטיקה ולדווח על הציון שלהם בתעודה. שאלון זה (נספח 1) נועד לאפיין את משתתפי המחקר מבחינת הישגיהם בלימודי המתמטיקה והעמדות שלהם כלפי המקצוע.

לפני תחילת המניפולציה הניסויית הוסבר לתלמידים ש"בעיה מאתגרת" היא שאלה מעניינת אשר מעוררת רצון להתמודד אתה.

השלב הראשון של המשימה נמשך 20-15 דקות ובו ניתן לתלמידים שאלון שכלל שש בעיות מתמטיות (ראו נספח 2). התלמידים התבקשו לקרוא את הבעיות בלי לנסות לפתור אותן, לדרג את מידת הקושי של כל בעיה על-פי תפיסתם ולציין עד כמה היא מאתגרת אותם ("מידת האתגר"). הדירוג נעשה

בסולם של 4 דרגות: 1 פירושו "בעיה לא קשה" או "לא מאתגרת" ו-4 פירושו "בעיה קשה מאוד" או "מאתגרת מאוד". לאחר שהתלמידים סיימו למלא את השאלון הוא נלקח מהם. בשלב זה המעורבות של התלמידים בפתרון השאלות היה נמוך שהרי הם לא ניסו כלל לפתור אותן אלא רק קראו אותן.

בשלב השני קיבלו התלמידים שוב את אותו השאלון, ובמשך 45 דקות ניסו לפתור את הבעיות. לאחר מכן הם התבקשו לדרג שוב, על-פי תפיסתם, את מידת הקושי ואת מידת האתגר של אותן הבעיות. לאחר שהתלמידים השלימו את המשימה, נלקחו מהם השאלונים. בשלב זה התלמידים התמודדו באופן פעיל עם הבעיות, והמעורבות שלהם הייתה גבוהה.

בשלב השלישי הציגו המורים לתלמידים את פתרון הבעיות. דרך הפתרון הוצגה באותו אופן בכל אחת מהכיתות שהשתתפו במחקר. לאחר מכן חולק אותו שאלון לתלמידים בפעם השלישית, והם התבקשו לדרג שוב את מידת הקושי והאתגור של אותן הבעיות כפי שתפסו אותן הפעם. בשלב זה שבו הוצג הפתרון המודרך המעורבות האקטיבית של התלמידים בפעילות הייתה נמוכה מאשר בשלב השני.

2.3 מבנה המשימות

מתוך שש הבעיות שבשאלון שלוש משימות (משימות 3, 5, 6 – ראו נספח 2) היו "שגרתיות" במובן זה שהן עסקו בנושאים שנלמדו לפי תכנית הלימודים. לעומתן, שלוש האחרות היו "לא שגרתיות" (משימות 1, 2, 4 – ראו נספח 2) ועסקו בנושאים שאינם נכללים בתכנית הלימודים. לבעיות הלא שגרתיות היה גוון חידתי, וכדי להתמודד אתן נדרשה חשיבה לוגית והבנה מספרית.

3. תוצאות

3.1 ההישגים הבית-ספריים והעמדות כלפי לימודי המתמטיקה

58 תלמידים דיווחו על הציון שלהם במקצוע המתמטיקה בבית-הספר, והתקבל ממוצע של 80.60 עם סטיית תקן 22.78. כל התלמידים שהשתתפו במחקר מילאו שאלון עמדות (ראו נספח 1) על מקצוע המתמטיקה. בשאלון היו 9 פריטים, 3 מהם נוסחו הפוך משאר הפריטים. ממוצע התלמידים בשאלון היה 79.15 עם סטיית תקן 16.38. הן הציון של התלמידים במקצוע המתמטיקה והן הציון של התלמידים בשאלון העמדות התפלגו באופן א-סימטרי שלילי, וכך רוב התלמידים קיבלו ציונים גבוהים בשני המדדים (ראו לוח 1).

<u>לוח 1</u>: ממוצעים וסטיות תקן של הציונים הבית-ספריים
שדווחו על-ידי התלמידים והעמדות שלהם כלפי לימודי המתמטיקה

Descriptive Statistics

	מספר התלמידים	הממוצע	סטיית התקן	הציון המינמלי	הציון המקסימלי
הציון במתמטיקה	58	80.60	22.78	.00	100.00
העמדות כלפי המתמטיקה	73	79.15	16.38	36.11	100.00

3.2 אתגר וקושי

תחילה נתאר את הנתונים שקיבלנו על כל אחת מן הבעיות לחוד. לוח 2 מציג את מידת הקושי והאתגר שעליהן דיווחו התלמידים בכל אחת מן הבעיות. כמו כן מוצגים המתאמים בין מידת הקושי לאתגר שדווחו בכל משימה לפי שלב ההתערבות (קריאה בלבד, פתרון עצמאי, פתרון מודרך).

<u>לוח 2</u>: ממוצעים וסטיות תקן של רמות הקושי ושל רמות האתגר ברמות שונות של מעורבות
במשימה (ממוצע/סטיית תקן) ומתאמים בין מידת הקושי למידת האתגר (לפי שאלה)

	מידת הקושי			מידת האתגר			מתאמים בין מידת הקושי למידת האתגר (r)		
	קריאה בלבד	פתרון עצמאי	פתרון מודרך	קריאה בלבד	פתרון עצמאי	פתרון מודרך	קריאה בלבד	פתרון עצמאי	פתרון מודרך
שאלה 1	1.77 (0.89)	2.74 (1.09)	1.93 (1.07)	2.32 (1.17)	2.89 (1.13)	2.44 (1.16)	0.54**	0.61**	0.61**
שאלה 2	2.66 (0.92)	3.04 (1.03)	2.48 (1.02)	2.77 (1.01)	2.77 (1.17)	2.60 (1.05)	0.30**	0.66**	0.60**
שאלה 3	1.86 (0.96)	1.96 (0.99)	1.77 (0.89)	2.11 (1.13)	2.07 (1.03)	1.85 (1.05)	0.45**	0.38**	0.45**
שאלה 4	2.18 (1.02)	2.48 (1.19)	2.11 (1.16)	2.25 (1.09)	2.48 (1.24)	2.22 (1.15)	0.52**	0.66**	0.46**
שאלה 5	2.05 (1.04)	2.25 (1.18)	2.19 (1.07)	1.96 (0.99)	2.23 (1.17)	2.11 (0.98)	0.37**	0.46**	0.42**
שאלה 6	2.23 (1.05)	2.42 (1.20)	2.21 (1.15)	2.11 (1.17)	2.38 (1.14)	2.15 (1.05)	0.36**	0.54**	0.54**

** $P<0.01$
N=73

הנתונים שבלוח 2 מראים את התוצאות האלה: שאלה מס' 1 (לא שגרתית) נחשבה לקלה ביותר בשלב הקריאה בלבד ולמאתגרת ביותר בשלב הפתרון העצמאי; שאלה מס' 2 (לא שגרתית) נחשבה לשאלה הקשה ביותר בכל שלושת השלבים של המחקר, ולמאתגרת ביותר בשלב הקריאה בלבד ובשלב הפתרון המודרך; שאלה מס' 3 (שגרתית) נחשבה לשאלה הקלה ביותר בכל שלושת השלבים וגם לשאלה המאתגרת פחות מכולן בשלב הפתרון העצמאי ובשלב הפתרון המודרך; השאלה המאתגרת פחות מכולן בשלב הקריאה בלבד הייתה שאלה מס' 5 (שגרתית).

אם כן, מתברר שגם במידת הקושי וגם במידת האתגר נמצא אותו דפוס: עלייה במעבר משלב הקריאה בלבד לשלב הפתרון העצמאי וירידה במעבר משלב הפתרון העצמאי לשלב הפתרון המודרך. לדוגמה, בדיווח על רמת הקושי בשאלה מס' 1 התקבלו הממוצעים האלה: 1.77, 2.74, 1.93. הממצא היחיד שחרג מהדפוס הנזכר לעיל היה בדיווח על מידת האתגר בשאלה מס' 3 (שאלה שגרתית): הממוצעים ירדו בה בעקביות: 2.11, 2.07, 1.85. יש להניח שתלמידים הצליחו לפתור את הבעיה וכי הפתרון המודרך הוריד את מידת האתגר.

העלייה של מידת הקושי במעבר משלב הקריאה בלבד לשלב הפתרון העצמאי הייתה גדולה יותר בבעיות הלא שגרתיות מאשר בבעיות השגרתיות, ונעה בין 0.30 ל-0.97, ואילו בבעיות שגרתיות טווח העלייה היה רק בין 0.1 ל-0.2. תמונה דומה נמצאה בדיווח על מידת הקושי במעבר משלב הפתרון העצמאי לשלב הפתרון המודרך: בזמן שהטווח בבעיות הלא שגרתיות היה בין 0.37 ל-0.81, הטווח בבעיות שגרתיות היה בין 0.06 ל-0.21.

כדי לבצע ניתוח סטטיסטי יצרנו את המשתנים האלה: מידת האתגר המדווחת ומידת הקושי המדווחת. לכל תלמיד חישבנו את הממוצע של דירוגי הקושי והאתגר בכל בעיה לחוד, ולאחר מכן חישבנו את הממוצע מעבר לשלוש הבעיות השגרתיות. את הממוצע הזה חישבנו גם לחוד בכל אחד משלושת השלבים בניסוי. באותה דרך חישבנו גם את הממוצעים של דירוגי הקושי והאתגר בבעיות הלא שגרתיות.

בלוחות 3 ו-4 מוצגים הממוצעים וסטיות התקן של משתנים אלו.

לוח 3: ממוצעים וסטיות תקן של **רמות הקושי** בבעיות השגרתיות ולא שגרתיות וברמות שונות של מעורבות עם המשימה (ממוצע/סטיית תקן)(N=73)

	קריאה בלבד	פתרון עצמאי	פתרון מודרך	סך הכול (מעבר לשלבים)
בעיות שגרתיות	2.05 (0.68)	2.21 (0.80)	2.05 0.75	2.11 (0.59)
בעיות לא שגרתיות	2.21 (0.67)	2.75 (0.76)	2.18 (0.75)	2.38 (0.52)
סך הכול (מעבר לכל הבעיות)	2.13 (0.57)	2.48 (0.67)	2.12 (0.66)	2.24 (0.51)

לוח 4: ממוצעים וסטיות תקן של **רמות האתגר** בבעיות השגרתיות והלא שגרתיות וברמות שונות של מעורבות עם המשימה (ממוצע/סטיית תקן)(N=73)

	קריאה בלבד	פתרון עצמאי	פתרון מודרך	סך הכול (מעבר לשלבים)
בעיות שגרתיות	2.06 (0.79)	2.23 (0.80)	2.04 (0.69)	2.11 (0.55)
בעיות לא שגרתיות	2.45 (0.67)	2.71 (0.81)	2.42 (0.78)	2.53 (0.53)
סך הכול (מעבר לכל הבעיות)	2.25 (0.57)	2.47 (0.65)	2.23 (0.62)	2.32 (0.44)

מהלוחות האלה עולים כמה ממצאים שנמצאים בהלימה עם מה ששיערנו. אפשר לראות כי הבעיות הלא שגרתיות נתפסו קשות יותר ומאתגרות יותר מהבעיות השגרתיות. עוד בולט כי הערכות הקושי והאתגר היו גבוהות יותר בשלב הפתרון העצמאי, משהיו בשלבים האחרים. בשלב הזה מעורבות התלמידים בפתרון הייתה הגבוהה ביותר. נוסף על כך נראה כי הדפוסים שהתקבלו דומים זה לזה בבעיות השגרתיות ובבעיות הלא שגרתיות, גם ברמת הקושי וגם ברמת האתגר.

כדי לוודא שהתלמידים הבדילו בין "רמת הקושי" ל"רמת האתגר", בדקנו את המתאמים בין דירוגי רמות הקושי לדירוגי רמות האתגר. המתאמים אינם גבוהים יותר מהמצופה ונעים בין 0.5 ל-0.7.

לאחר מכן עשינו ניתוח רב-משתנים (repeated measures MANOVA) ובו המשתנים "שגרתיות המשימה" (שגרתית, לא שגרתית) ו"שלב הניסוי" (קריאה בלבד, פתרון עצמאי, פתרון מודרך) היו המשתנים הבלתי-תלויים. המשתנים התלויים היו אלה שיצרנו לדירוגי רמות הקושי והאתגר. התוצאות מוצגות בלוח 5.

<u>לוח 5:</u> ניתוח רב-משתנים לבדיקת ההשפעה של מוכרות המשימה ועיתוי ההערכה על דירוגי רמת הקושי והאתגר יחד

Multivariate Tests[a]

Effect			Value	F	Hypothesis df	Error df	Sig.	Partial Eta Squared
Between Subjects	Intercept	Pillai's Trace	.969	1108.942[b]	2.000	71.000	.000	.969
Within Subjects	time	Pillai's Trace	.310	7.748[b]	4.000	69.000	.000	.310
	novelty	Pillai's Trace	.358	19.771[b]	2.000	71.000	.000	.358
	time * novelty	Pillai's Trace	.218	4.819[b]	4.000	69.000	.002	.218

a. Design: Intercept ;Within Subjects Design: time + novelty + time * novelty

b. Exact statistic

כפי שאפשר לראות, בניתוח רב-משתנים נמצאו אפקטים עיקריים מובהקים ואינטראקציה מובהקת.

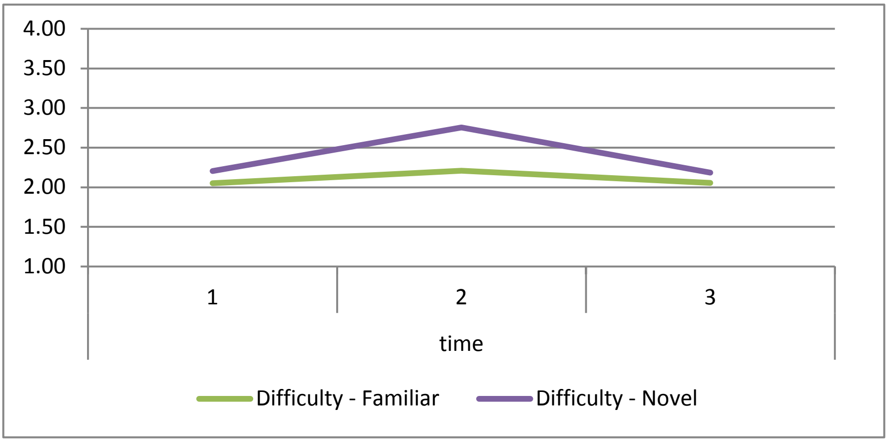
בניתוחי השונות שבצענו לאחר מכן נמצאו הבדלים בדירוגי הקושי בין הבעיות השגרתיות לבעיות הלא שגרתיות: הערכת הקושי הייתה גבוהה יותר בבעיות הלא שגרתיות. אותו הדפוס התקבל גם בדירוג האתגר – האתגר דורג גבוה יותר בבעיות הלא שגרתיות (קושי: $F_{(1, 72)} = 26.39, p < 0.01$; אתגר: $F_{(1, 72)} = 34.49, p < 0.01$).

גם שלב הניסוי (מידת המעורבות) השפיע על דירוגי הקושי והאתגר של הבעיות:

קושי: $F_{(2, 144)} = 14.23, p < 0.01$; אתגר: $F_{(2, 144)} = 4.72, p < 0.05$. התלמידים דירגו את רמת הקושי והאתגר כגבוהים באופן משמעותי בשלב הניסוי השני, שבו הם התבקשו לפתור את המשימה בכוחות עצמם – לעומת השלב הראשון, שבו הם רק קראו את המשימה (p<.01 לכל השוואה) או לעומת שלב השלישי, שבו ההערכה נעשתה אחרי שהוצג להם הפתרון על-ידי המורה ($n.s$ לכל השוואה).

האינטראקציה בין שגרתיות הבעיה לשלב הניסוי נמצאה מובהקת רק כשהמשתנה התלוי היה רמת הקושי, קושי: $F_{(2, 144)} = 7.42, p < 0.01$; אתגר: $F_{(2, 144)} < 1, ns$. השאלות נחשבו קשות יותר בשלב הניסוי השני, שבו המעורבות של התלמידים בפתרון הייתה הגבוהה ביותר (p<.05) ולא היה הבדל בין שלב 1 לשלב 3 שבהם מידת המעורבות שלהם הייתה נמוכה יותר (n.s). דפוס זה מתבטא באופן בולט יותר בבעיות הלא שגרתיות (ראו תרשים 1). כלומר, אם הבעיה אינה שגרתית ובעלת גוון חידתי, היא קשה ביותר כאשר התלמידים מתבקשים להתמודד עמה בעצמם.

תרשים 1: דירוג **רמות הקושי** בשלושת שלבי הניסוי
(שנבדלו ברמת המעורבות בפתרון הבעיה) לפי שגרתיות הבעיה



סיכום

מחקר זה בחן בפעם הראשונה את נקודת מבטם של תלמידים בסוגיית האתגר והקושי הנתפס של בעיות מתמטיות הנבדלות זו מזו במידת השגרתיות שלהן. בדרך כלל נמצאו ממצאי המחקר בהלימה עם השערותינו.

מצאנו כי בעיות מתמטיות לא שגרתיות, שיש להן אופי חידתי, נתפסו קשות יותר וגם מאתגרות יותר בעיני התלמידים מבעיות שגרתיות. עוד ראינו כי כאשר מידת המעורבות של התלמידים במשימה רבה ביותר (בשלב השני שבו הפתרון היה עצמאי), הערכת הקושי והאתגר היו גבוהים יותר יחסית למצבים שבהם רמת המעורבות הייתה נמוכה יותר (קריאה בלבד או פתרון מודרך על-ידי המורה).

נוסף על כך, ראינו כי רק בהקשר של תפיסת הקושי – הבעיות הלא שגרתיות נתפסו קשות מהבעיות השגרתיות בשלב הפתרון העצמאי. לעומת זאת, בשני שלבי הניסוי האחרים לא היה הבדל מובהק בין תפיסת הקושי של הבעיות השגרתיות ללא שגרתיות. ממצא זה לא התקבל בעבור משתנה האתגר, ויש לשוב ולבחון זאת בעתיד.

המחקר מרמז על כך (ויש להעמיק בכך במחקרים נוספים) ששאלות לא שגרתיות בעלות גוון חידתי עשויות להעלות את עניין התלמידים בלימודי המתמטיקה. יש הלימה של הממצא הזה עם הטענות של קוני (Cooney, 2001) שלפיהן אי אפשר לפתח אצל התלמידים עניין במתמטיקה רק בעזרת משימות שגרתיות. במובן זה תוצאות המחקר מרמזות על החשיבות שבשילוב משימות לא שגרתיות בשיעורי המתמטיקה בבית-הספר ובהכשרת פרחי הוראה, וזה בניגוד למה שמעדיפים מורים למתמטיקה בשדה (Leikin & Levav-Waynberg, 2007).

עם זאת יש לזכור כי המחקר נבדק בקרב אוכלוסייה ממוקדת (דוברי ערבית בדרום הארץ) ובמדגם קטן (שלוש כיתות בלבד). במובן זה המחקר הזה גישושי בלבד, והממצאים ההולמים את השערותינו מחזקים את הצורך לבחון את הדברים בקרב אוכלוסייה רחבה יותר ובמדגם גדול בהרבה.

רשימת מקורות

Applebaum, M., & Leikin, R. (2007). Teachers' conceptions of mathematical challenge in school mathematics. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 9-16). Seoul: PME.

Ball, D. L., Hill, H. C., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, *29*(1), 14-17, 20-22, 43-46.

Barbeau, E., & Taylor, P. (Eds.). (2009). *Challenging mathematics in and beyond the classroom: The 16th ICMI study.* Boston, MA: Springer-Verlag.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Charles, R., & Lester, F. (1982). *Teaching problem solving: What, why and how*. Palo Alto, CA: Dale Seymour.

Cooney, T. J. (2001). Considering the paradoxes, perils, and purposes of conceptualizing teacher development. In F. L. Lin & T. J. Cooney (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 9-31). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Guberman, R., & Leikin, R. (2013). Interesting and difficult mathematical problems: Changing teachers' views by employing multiple-solution tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(1), 33-56.

Jaworski, B. (1992). Mathematics teaching: What is it? *For the Learning of Mathematics, 12*(1), 8-14.

Jaworski, B. (1994). *Investigating mathematics teaching: A constructivist inquiry*. London: Falmer Press.

Kazemi, E. (1998). Discourse that promotes conceptual understanding. *Teaching Children Mathematics*, *4*(7), 410-414.

Krainer, K. (2001). Teachers’ growth is more than the growth of individual teachers: The case of Gisela. In F. L. Lin & T. J. Cooney (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 271-293). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Leikin, R. (2004). Towards high quality geometrical tasks: Reformulation of a proof problem. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 209-216). Bergen: Bergen University College. Retrieved from http://www.emis.ams.org/proceedings/PME28/RR/RR243_Leikin.pdf

Leikin, R., & Levav-Waynberg, A. (2007). Exploring mathematics teacher knowledge to explain the gap between theory-based recommendations and school practice in the use of connecting tasks. *Educational Studies in Mathematics*, *66*, 349-371.

Polya, G. (1973). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Powell, A. B., Borge, I. C., Fioriti, G. I., Kondratieva, M., Koublanova, E., & Sukthankar, N. (2009). Challenging tasks and mathematics learning. In E. J. Barbeau & P. J. Taylor (Eds.), *Challenging mathematics in and beyond the classroom* (pp. 133-170). Boston, MA: Springer.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowing growth in teaching. *Educational Researcher, 5*(2), 4-14.

Simon, A. M. (1997). Developing new models of mathematics teaching: An imperative for research on mathematics teacher development. In E. Fennema & B. Scott-Nelson (Eds.), *Mathematics teachers in transition* (pp. 55-86). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Steinbring, H. (1998). Elements of epistemological knowledge for mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 1*(2), 157-189.

Stillman, G., Cheung, K., Mason, R., Sheffield, L., Shiraman, B., & Ueno, K. (2009). Challenging mathematics: Classroom practices. In E. J. Barbeau & P. J. Taylor (Eds), *Challenging Mathematics in and beyond the classroom* (pp. 243-283). Boston, MA: מארק

מארק אפלבאום, המכללה האקדמית לחינוך ע״ש קיי, באר-שבע

ד״ר מארק אפלבאום שימש כראש התמחות מתמטיקה במכללת קיי, וכראש הלימודים של כל ההתמחויות במכללה. מתמחה בתחומים הבאים: פיתוח חשיבה מתמטית, הוראת המתמטיקה בעזרת בעיות חקר וגילוי, איתגור תלמידים בעלי יכולות גבוהות במתמטיקה, שילוב משחקים בהוראת המתמטיקה. ד״ר אפלבאום הוציא לאור מספר ספרים ומאמרים רבים.

נספח 1: שאלון לתלמידים

א. פרטים אישיים

השם שלי: ______________

אני בן / בת

לומד/ת בכיתה ________

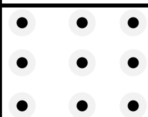
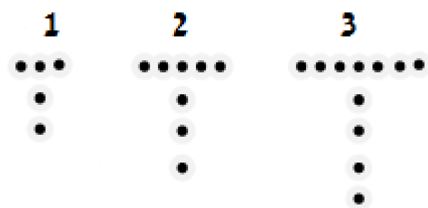
הציון שלי במתמטיקה: __________

ב. באיזו מידה אתה מסכים עם כל אחד מן המשפטים האלה ?

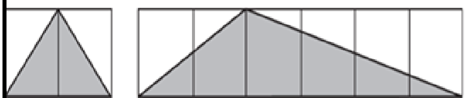
מספר	היגדים	מסכים מאוד	מסכים	לא כל כך מסכים	בכלל לא מסכים
1.	אני מצליח במקצוע המתמטיקה				
2.	אני מתעניין במקצוע המתמטיקה				
3.	אני סובל מחרדת מבחנים במתמטיקה				
4.	אני אוהב לפתור תרגילים במתמטיקה				
5.	אני מרגיש הנאה בשיעורי המתמטיקה				
6.	אני פוחד ממקצוע המתמטיקה				
7.	אני תמיד מכין את שיעורי הבית במתמטיקה				
8.	אני מתקשה במקצוע המתמטיקה				
9.	אני פעיל בשיעורי המתמטיקה				

נספח 2: שאלון לתלמידים

סמנו ב-x

<table>
<tr><th rowspan="2">שאלות</th><th colspan="4">רמת האתגור</th><th colspan="4">רמת הקושי</th></tr>
<tr><th>לא מאתגר</th><th>מאתגר מעט</th><th>מאתגר</th><th>מאתגר מאוד</th><th>לא קשה</th><th>די קשה</th><th>קשה</th><th>קשה מאוד</th></tr>
<tr><td>דרך 9 נקודות שלפניכם העבירו 4 קטעים בלבד. יש לעשות זאת בלי להרים את עפרונכם.
</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>ילדים רצו לעבור גשר כאשר בו זמנית על הגשר היו יכולים ללכת לא יותר מ-2 ילדים. היה חשוך מאוד והיה להם פנס אחד בלבד (אין לנוע בלי פנס). הילדים היו בכושר גופני שונה ויכלו לעבור את הגשר בזמנים שונים: ילד A ב-1 דקה, ילד B ב-2 דקות, ילד C ב-5 דקות וילד D ב-10 דקות. יש להעביר את כל הילדים לצד שני של הגשר ב-17 דקות בלבד. כיצד תעשו זאת?</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>

תתבוננו בסדרה שלפניכם והשלימו את הטבלה:
מספר הנקודות בצורה שמופיעה במקום:
<table><tr><th>הראשון</th><th>השני</th><th>השלישי</th><th>החמישי</th><th>ה-50</th><th>ה-N</th></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>איך אפשר לטגן 3 חתיכות "שניצל" בדקה וחצי כך שנפח המחבת 2 חתיכות לכל היותר וכל צד צריך חצי דקה לטיגון?</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

בחנות מסוימת יש ארבעה סוגים של קופסאות קפה: 2 ק"ג ב-78 ₪. 1ק"ג ב-38 ₪. 500 גר' ב-21 ₪. 250 גר' ב-10 ₪. מהו המחיר הזול ביותר בקניית $2\frac{1}{2}$ ק"ג קפה?								
לפניך 2 משולשים:  מצא פי כמה גדול שטח המשולש האחד מהאחר.								

נספח 3

אפיון של משימה מאתגרת במתמטיקה (של המורים) N=41	הממוצע
בעיות אינטגרטיביות	6
בעיות הדורשות חשיבה לוגית	6.15
פתרון בעיות בדרכים אחדות	6.44
בעיות חקר וגילוי	6.59
בעיות לא שגרתיות	7.66
בעיות הדורשות הכללה	8.20
הוכחת טענות חדשות	8.29
בעיות הדורשות בניות עזר	9.90
מציאת טעויות	10.15
פרדוקסים	10.29
בעיות הדורשות ידע שאינו נכלל בתכנית הלימודים	10.56
בעיות ובהן פרמטרים	10.78

נספח 4

מתאמים בין רמות הקושי לרמות האתגור

		Total_CH1	Total_CH2	Total_CH3	Total_DF1	Total_DF2	Total_DF3
Total_CH1	Pearson Correlation	1	.396	.248	.458	.216	.188
	Sig. (2-tailed)		.001	.035	.000	.066	.111
	N	73	73	73	73	73	73
Total_CH2	Pearson Correlation	.396	1	.210	.320	.677	.220
	Sig. (2-tailed)	.001		.075	.006	.000	.061
	N	73	73	73	73	73	73
Total_CH3	Pearson Correlation	.248	.210	1	.081	.086	.566
	Sig. (2-tailed)	.035	.075		.496	.468	.000
	N	73	73	73	73	73	73
Total_DF1	Pearson Correlation	.458	.320	.081	1	.592	.412
	Sig. (2-tailed)	.000	.006	.496		.000	.000
	N	73	73	73	73	73	73
Total_DF2	Pearson Correlation	.216	.677	.086	.592	1	.382
	Sig. (2-tailed)	.066	.000	.468	.000		.001
	N	73	73	73	73	73	73
Total_DF3	Pearson Correlation	.188	.220	.566	.412	.382	1
	Sig. (2-tailed)	.111	.061	.000	.000	.001	
	N	73	73	73	73	73	73