מדור חדשות מתמטיות / נצה מובשוביץ-הדר

מדור החדשות המתמטיות בעיתון זה אמור לתת לקהל קוראיו תמונה על הדברים המעסיקים את הקהילייה המתמטית בת זמננו. הוא נכתב כך שמורי-מורים יוכלו להשתמש בו כפי שהוא כחומר המופקד לקריאה ולימוד עצמי בידי פרחי-הוראה, או מורים משתלמים, במגמה לפתח את המודעות שלהם לכך שמתמטיקה היא מקצוע שיש בו הרבה מאוד שאלות בלתי פתורות והדרמה המתרחשת סביב החתירה לפתרונן היא מדהימה.

התגלה עוד מספר ראשוני ענק

ב-2.5.2013 רעשו הכותרות באמצעי המדיה התקשורתית – התגלה מספר ראשוני חדש, גדול יותר מכל מספר ראשוני ידוע עד כה.

אף כי כבר לפני אלפיים שנה הוכיח אוקלידס שאין סוף למספרים הראשוניים הטבעיים, הגילוי של מספרים ראשוניים גדולים מהווה אתגר בלתי פוסק למתמטיקאים ולחובבים. השימוש של מספרים ראשוניים גדולים להצפנה ולבחינת יעילותן של תוכנות המבצעות במהירות כפל של מספרי-ענק, מתחרה בהנאה הצרופה שמן הסתם טמונה בחיפוש ובגילוי.

באפריל 2005 התבשרנו כי רופא מנתח מומחה לעיניים, מרטין נובק, שכתחביב משתתף בחיפוש הבלתי נלאה אחרי מספרי מרסן ראשוניים חדשים המתבצע בשיתוף פעולה בין-לאומי בין מחשבי ענק – GIMPS: The Great Mersenne Prime Search, גילה את מספר מרסן הראשוני ה-42, שהיה המספר הראשוני הכי גדול הידוע אז: $2^{25,964,951}-1$. זהו מספר בעל 7,816,230 ספרות, מעל לחצי מיליון ספרות יותר מהמספר הראשוני הקודם שהיה הכי גדול עד לגילוי זה.[1] למרבה הצער, נובק לא יכול היה לזכות בפרס בסך $100,000 מאת הקרן Electronic Frontier Foundation שציפתה לראשון שיגלה מספר ראשוני בעל עשרה מיליון ספרות (לפחות).

ב-15 בדצמבר 2005 התבשרנו על מספר מרסן ראשוני גדול עוד יותר: $2^{30,40}-1$. שמחתם של האנשים שגילו אותו – קרטיס קופר וסטיבן בון, שניהם פרופסורים באוניברסיטת המדינה של מיסורי, הייתה מהולה

1. מספר מרסן (על שם נזיר צרפתי בשם מארין מרסן 1588-1648) הוא מספר בעל הצורה 2^p-1 כאשר p הוא מספר ראשוני. לא כל ראשוני הוא מספר מרסן (למשל 5 איננו מספר מרסן) ולא כל מספר מרסן הוא ראשוני. למשל 2047 הוא מספר מרסן כי $2047 = 2^{11}-1$, אבל הוא לא ראשוני כי 23x89=2047. אבל מספרי מרסן קלים יותר מהאחרים לזיהוי כמספרים ראשוניים. לכן, החיפוש אחר מספרי-ענק ראשוניים מתמקד במספרי מרסן. עד כה ידועים 48 מספרי מרסן ראשוניים.

באכזבה מסוימת. מספר מרסן זה, ה-43 הידוע עד אז, לא זיכה אותם בפרס כי יש לו "רק" 9,152,052 ספרות... צמד החוקרים המשיכו לחפש ואכן ב-11.9.2006 גילו עוד מספר מרסן ראשוני, אבל למרבה הצער גם מספר הספרות שלו לא עלה על 10 מיליון ספרות.

המרוץ אחרי מספר ראשוני בעל 10 מיליון ספרות נמשך – עד שב-23 באוגוסט 2008 אדסון סמית, מנהל המחשוב במחלקה למתמטיקה באוניברסיטת קליפורניה בלוס אנג'לס, זכה בפרס הגדול על הגילוי של מספר ראשוני כזה. למען האמת, המספר שגילה הוא בעל 13 מיליון ספרות !

ב-6.9.2008 שבועיים לאחר גילוי המספר $2^{43,112,609}-1$, בעל 13 מיליון ספרות, התגלה מספר מרסן ראשוני שיש לו 11 מיליון ספרות "בלבד" – $2^{37,156,667}-1$. זו הייתה החמצה בשבועיים בלבד של הפרס הגדול. גם $2^{42,643,801}-1$ הוא מספר מרסן ראשוני ש"החמיץ את הפרס" בהיותו בעל 12,837,064 ספרות. הוא התגלה בשנת 2009 על-ידי הנורווגי אוד מגנר סטרינדמו.

המירוץ אחרי מספרי-ענק ראשוניים נמשך ועמו גם פרסים גדלים והולכים.

פרס בסך $150,000 מחכה למי שיגלה מספר ראשוני בעל מאה מיליון ספרות או יותר ופרס בסך $250,000 יוענק על גילויו של המספר הראשוני הראשון שמספר הספרות שלו הוא אלף מיליון (ביליון, או מיליארד 10^9).

ב-2.5.2013 חזר קרטיס קופר לראש שורת המגלים של מספרי מרסן ראשוניים בגילוי של המספר הראשוני $2^{57,885,161}-1$ שהוא בעל 17,425,170 ספרות. צאו וחשבו את אורכו אם מדפיסים את כל הספרות שלו ברווחים של 4 ספרות לכל סנטימטר.

http://primes.utm.edu/largest.html

25 שנה אחרי שהועלתה, זכתה (כפי הנראה) השערת ABC להוכחה

בחודש מרץ 2013 פרסם שיניצ'י מוצ'יזוקי את התיקון האחרון בהוכחתו להשערה הנקראת השערת ABC.

מהי השערת ABC?

כמו השערות רבות בתורת המספרים, ההשערה עצמה היא די קלה להבנה. היא עוסקת במשוואה האריתמטית הכי בסיסית שניתן להעלות על הדעת $a+b=c$ באשר a, b, c הם מספרים שלמים. במילים פשוטות ההשערה טוענת שאם $a,\ b,\ c$ הם שלושה מספרים שלמים שאין להם גורם משותף, ולמחוברים $a,\ b$ יש גורמים ראשוניים בעלי מידת ריבוי גבוהה (כלומר, הם מתחלקים בחזקה גבוהה של מספר ראשוני אחד לפחות), אז לסכום c אין גורמים ראשוניים שמידת הריבוי שלהם גבוהה.

לדוגמה: $64+81=145$, 2^6 מחלק את 64, 3^4 מחלק את 81. לשני אלה יש "הרבה" גורמים ראשוניים (שווים), ואילו 145 מתחלק רק בשני גורמים ראשוניים ב-5 וב-29 שמידת הריבוי שלהם היא 1.

במונחים יותר מדויקים נזדקק למושג: מספר שלם חופשי מריבוע (Square free). מספר כזה הוא מספר שלם שאינו מתחלק בריבוע של אף מספר שלם פרט ל-1. לדוגמה המספרים:

$42 = 2\times 3\times 7$, $6 \times \times$ 1,
$1001 = 7\times 11\times 13$ הם חופשיים מריבוע. לעומתם 54 ו-75 אינם חופשיים מריבוע כי 54 מתחלק ב-3^2 ו-75 מתחלק ב-5^2. בפירוק לגורמים של מספרים חופשיים מריבוע, הגורמים הראשוניים מופיעים רק פעם אחת.

לכל מספר טבעי n אפשר להתאים את החלק החופשי-מריבוע שלו, שהוא מכפלת כל גורמיו הראשוניים כשכל אחד מהם מופיע בדיוק פעם אחת. למספר הזה מקובל לקרוא בשם הרדיקל של n. נסמן את המספר הזה ב- $\mathrm{R}(n)$. לדוגמה:

$$\mathrm{R}(360) = \mathrm{R}\left(2^3\times 3^2\times 5\right) = 2\times 3\times 5 = 30$$

כאמור השערת ABC עוסקת בשלשות של מספרים שלמים זרים a, b, c שבהם מתקיים $a+b=c$, כגון $4+5=9$. מכפלת השלושה היא 180 והרדיקל של המכפלה הוא 30 (מדוע?). במקרה זה קל לראות שהמספר השלישי – 9 (שהוא סכום שני האחרים) קטן יותר מהרדיקל של מכפלת שלושת המספרים.

האם יכול לקרות ההפך? כלומר האם יש שלושה מספרים שלמים זרים שהאחד מהם (c) הוא סכום שני האחרים ($a+b$) שבה הסכום (c) יותר גדול מהרדיקל של מכפלת השלושה? $c > \mathrm{R}(abc)$? – התשובה היא חיובית. כך למשל בעבור השלשה 5, 27, 32 המקיימת את תנאי הזרות והסכום, מתקיים שמכפלת שלושת רכיביה היא $5\times 27\times 32 = 4{,}320$, והרדיקל של המכפלה, גם כאן, הוא 30. אבל במקרה זה המספר השלישי, 32, יותר גדול מהרדיקל של המכפלה. שלשות מסוג זה הן די נדירות. רק 120 מבין כל השלשות שבהן c<10,000 הן כאלו. ואף-על-פי-כן יש אינסוף שלשות כאלו.

נשאלת השאלה, עד כמה אפשר "למשוך את העניין", כלומר האם יש שלשות שבהן המספר השלישי הרבה יותר גדול מהרדיקל, אולי עד כדי כך שהוא גדול מריבוע הרדיקל? – עד היום לא נמצאה שלשה כזאת. קל למצוא דוגמה לשלשה שבה זה לא מתקיים. הנה למשל: בעבור $a=3$, $b=125$, השלישייה היא 3, 125, 128 ומתקיים $128 < \left[\mathrm{R}(3\mathrm{x}125\mathrm{x}128)\right]^2 = 30^2$. אם לא מגזימים עד כדי ריבוע הרדיקל של המכפלה ומסתפקים בשלשות שעבורן המספר השלישי יותר גדול מחזקה α גדולה מ-1 וקטנה מ-2 של הרדיקל של המכפלה, אפשר למצוא שלשה שבה הסכום c עולה על הרדיקל של המכפלה באותה חזקה. למשל, השלשה 2; 6,436,341 ; 6,436,343. במקרה זה $a=2$, $b=3^{10}\times 109$ ו- $c=23^5$.

לפיכך

$$\mathrm{R}(abc) = 2\times 3\times 23\times 109 = 15{,}042$$

ולכל מעריך $\alpha < 1.6299$, מתקיים:

$$6{,}436{,}343 > 15{,}042^{\alpha}$$

תובנות מסוג זה הן מעניינם של מתמטיקאים העוסקים בתורת המספרים, שאליה שייכת גם השערת ABC.

במונחים אלה השערת ABC אומרת שלכל $\varepsilon > 0$, קיים לכל היותר מספר סופי של שלשות של מספרים שלמים חיוביים זרים a, b, c המקיימים $a+b=c$, שעבורם $c > [R(abc)]^{1+\varepsilon}$.

כלומר, למעט מספר סופי של שלשות, בדרך-כלל בעבור שלושה מספרים זרים שהאחד מהם (c) הוא סכום שני האחרים (a+b), המצב הוא ש- $c < [R(abc)]^{a}$ כאשר המעריך $\alpha > 1$. השערת ABC דנה בקיומם של מספר סופי של יוצאים מן הכלל לכל היותר (אם בכלל), כלומר בקיומן של מספר סופי של שלשות שבהן c גדול ממש מחזקה גדולה מ-1 (ולו במעט) $\alpha = 1+\varepsilon$ של הרדיקל של המכפלה abc.

במילים אחרות אפשר לומר שההשערה קובעת כי לכל $\varepsilon > 0$ קיים קבוע $K(\varepsilon)$ כך שלכל שלושה מספרים זרים שהאחד מהם (c) הוא סכום שני האחרים ($a + b$) מתקיים:

$$c < K(\varepsilon)[R(abc]^{1+\varepsilon}$$

כמה מילים על ההשערה וגלגוליה

השערת ABC הועלתה בשנת 1985 על-ידי המתמטיקאי הבריטי דיויד מסר והמתמטיקאי הצרפתי ג'וזף אוסטרלה. למעלה מ-25 שנה חלפו ואף מתמטיקאי לא הצליח להוכיח אותה, אף כי רבים וטובים ניסו.

בשנת 2006 הוקם על-ידי המחלקה למתמטיקה של אוניברסיטת ליידן בהולנד פרויקט לאיתור שלשות של מספרים שלמים חיוביים זרים a, b, c המקיימים $a + b = c$, שעבורן מתקיימת השערת ABC, מתוך תקווה שיסתמן רמז להוכחת ההשערה על-ידי תבנית כלשהי שתבצבץ מאוסף המקרים הפרטיים. למעלה מ-23 מיליון שלשות הצטברו ברשימה הודות לאלפי מתמטיקאים מלמעלה ממאה מדינות שונות שהשתתפו בפרויקט עד לשנת 2012. http://abcathome.com/

והנה לפני שנה, באוגוסט 2012, מתמטיקאי יפני מאוניברסיטת קיוטו, בשם שיניצ'י מוצ'יזוקי, הכריז שפיצח את סוד ההשערה ופרסם את הוכחתה באינטרנט. מוצ'יזוקי הוא מתמטיקאי בעל שם. הוא החל את לימודיו הגבוהים בפרינסטון בהיותו בן 16 והפך לפרופסור מן המניין בגיל 33. לזכותו מספר לא מבוטל של תוצאות מתמטיות מתקדמות, והוא ידוע בקפדנותו המתמטית. על כן הכרזתו התקבלה בקהילייה המתמטית ברצינות ועמיתיו המתמטיקאים הסתערו על ניתוחה, על מנת לאשש אותה או להפריך אותה, כמקובל.

נמצא כי גישתו כוללת "עקומים אליפטיים" (עקומים שמשוואתם היא מסוג $y^2 = x^3 + ax + b$) שהיוו גם את המפתח לפיצוחו של המשפט האחרון של פרמה. אבל

בכך הסתיים הדמיון. למרבה האכזבה לא רק שההוכחה השתרעה על פני מאות עמודים, אלא ששיטת ההוכחה הייתה חדשנית, קשה להבנה ונשענה על הבנת סדרה ארוכה של תוצאות שפורסמו אמנם בעבר, אבל לא משכו תשומת לב בקהילייה המתמטית.

באוקטובר 2012 התברר שיש שגיאה בהוכחה. מוצ'יזוקי מיהר לפרסם באתר שלו הודאה בטעות, אבל טען שהיא איננה משבשת את ההוכחה ומאז פרסם סדרת מהדורות מתוקנות של ההוכחה שהאחרונה שבהן פורסמה במרץ 2013 http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~motizuki/papers-english.html. בניגוד למקובל בקהילייה המתמטית, מסרב המתמטיקאי היפני המבריק לקבל הזמנות להרצות ולהסביר את ממצאיו, שעליהם עבד כמעט בלי לשתף אחרים במשך כעשר שנים.

"חבר המושבעים" המתמטי אשר שופט את קבילותה של כל הוכחה חדשה, יזדקק כנראה לעוד זמן מה כדי ללמוד את כל הפרטים הרבים לפני שההוכחה המתוקנת של מוצ'יזוקי תזכה ל"קונסנזוס" על נכונותה. המתמטיקאי דוריאן גולדפלד מאוניברסיטת קולומביה שבניו-יורק אמר בראיון שאם אכן ההוכחה נכונה, יהיה זה אחד ההישגים המרשימים של המתמטיקה במאה ה-21.

מה חשיבותה של השערת ABC?

עם העלאתה של השערת ABC בשנת 1985 היה ברור שלכשתוכח ההשערה, אפשר יהיה בנקל להוכיח בעקבותיה תוצאות רבות אחרות ובמיוחד המשפט האחרון של פרמה שטרם הוכח אז.[2]

המספרים הראשוניים הם ה"אטומים" של מערכת המספרים השלמים. כל מספר שלם ניתן להצגה כמכפלה של מספרים ראשוניים באופן אחד ויחיד (עד כדי סדר הגורמים). השערת ABC מאתגרת את השכל הישר מפני שהיא קובעת קשר מפתיע בין הגורמים הראשוניים של שני מספרים לבין הגורמים הראשוניים של סכומם (!). הוכחתה מצביעה על כך שיש תכונות עמוקות של אבני הבניין הפשוטות הללו של מערכת המספרים השלמים, שעדיין לא ירדנו לסוף הבנתן.

מומלץ לצפות בסרטון:
http://www.youtube.com/watch?v=RkBl7WKzzRw

ולקרוא את הבלוג על המתמטיקאי הנמצא בעין הסערה:
http://projectwordsworth.com/the-paradox-of-the-proof/

2. המשפט האחרון של פרמה אומר שרק בעבור $n = 2$ קיימים שלושה מספרים שלמים חיוביים a, b, c, כך ש $a^n + b^n = c^n$. באשר המעריך n הוא מספר שלם חיובי. הוא הועלה כהשערה על-ידי המתמטיקאי הצרפתי פייר דה פרמה בן המאה ה-19, אבל הוכח רק בשנת 1994 על-ידי המתמטיקאי הבריטי אנדרו ויילס.

פריצת דרך לקראת הוכחת השערת הראשוניים התאומים

הלוגיקן הגדול – קורט גֶידֶל (1906-1978) – זיעזע את יסודות המתמטיקה כשהוכיח בשנות ה-30 של המאה ה-20 שטענות מתמטיות נחלקות לשלושה סוגים ולא לשניים כפי שהאמינו עד אז – כאלו שניתן להוכיח אותן, כאלו שניתן להפריך אותן וכאלו שלא ניתן להוכיחן ולא ניתן להפריכן. אלה האחרונות הן בהכרח טענות אמת כי אי אפשר להפריך אותן. לאיזה משלושת הסוגים שייכת השערת התאומים? – זו ההשערה שקיימים אינסוף זוגות של מספרים ראשוניים שההפרש ביניהם הוא ההפרש המינימלי – 2, כמו למשל 41, 43 ועוד. שאלה זו עדיין לא הוכרעה. דורות של מתמטיקאים מנסים לשווא להוכיח אותה.

איש עוד לא הוכיח לא רק את זה, אלא אפילו לא משהו הרבה יותר "חלש" והוא שיש אינסוף ראשוניים שההפרש ביניהם הוא מספר טבעי n כלשהו. קל להראות שקיימת שורה ארוכה כרצוננו של מספרים עוקבים שכולם פריקים. הנה כך (הוכחה קונסטרוקטיבית):
בשורת המספרים הבאה יש n מספרים שלמים עוקבים:

$$(n+1)!+2,\ \ (n+1)!+3,\ \ \ldots,$$
$$(n+1)!+n,\ \ (n+1)!+(n+1)$$

וכל אחד מהם פריק (מדוע?).

הדבר היחיד שידוע בעניין הרווחים בין מספרים ראשוניים הוא משפט המספרים הראשוניים הקובע שההפרש הממוצע בין מספרים ראשוניים קטנים מ-n שואף ל- $\log(n)$ כאשר n שואף לאינסוף.

החדשות האחרונות הן, שבאפריל 2013, מתמטיקאי לגמרי לא מפורסם משם ייטאנג זאנג, מרצה באוניברסיטת ניו-המפשייר בארה"ב, הוכיח שקיים n טבעי קטן מ-70 מיליון שעבורו יש אינסוף ראשוניים שההפרש ביניהם הוא לכל היותר n (הוא לא הצביע על גודלו – הוכחה לא קונסטרוקטיבית!). ההוכחה עמדה בהצלחה בכל הבדיקות והיא קבילה בקהילייה המתמטית. בעקבות זאת מתחולל בחודשים האחרונים מרוץ מטורף להקטנתו של n. במהלך הקיץ האחרון n הוקטן ל-$n = 5,414$. ב-25.11.2013 התבשרנו שג'יימס מיינרד, בתר-דוקטורנט מאוניברסיטת מונטריאול, שבקנדה, הצליח להקטין את הפער ל-600 בלבד. מי יודע אולי עד שהכתבה הזאת תראה אור יצליחו להוריד את החסם העליון הזה ל-$n=2$ ובכך תוכח השערת התאומים.

לעדכון שוטף:
http://michaelnielsen.org/polymath1/index.php?title=Bounded_gaps_between_primes
http://gilkalai.wordpress.com/2013/09/20/polymath-8-a-success

פרופסור (אמריטוס) נצה מובשוביץ-הדר, הקימה בשנת 1977 את **"קשר חם"** - מרכז מו"פ **לקידום שיפור וריענון החינוך המתמטי** ומנהלת אותו מאז. עמדה בראש המחלקה להוראת המדעים בטכניון - מכון טכנולוגיה לישראל, ניהלה את המוזיאון הלאומי למדע בחיפה, הנהיגה צוותי כתיבה של תוכניות לימודים חדשניות, ביניהן סדרת המשדרים הדרמתיים "חשבון פשוט" שהופקה ע"י הטלוויזיה החינוכית וזכתה לפרסים בינלאומיים. פרופ' מובשוביץ-הדר פרסמה מאמרים רבים ושני ספרים, והעמידה דור של מורים למתמטיקה ותלמידי מחקר החדורים בשאיפה לקרב את המתמטיקה אל ליבו של הנוער. בשנים האחרונות היא נהנית ממתן סדרת הרצאות במתמטיקה לציבור הרחב.