ד"ר ויקטור אוקסמן
ד"ר משה סטופל

הוראת הסתברות באמצעות משחקי הדגמה ותרגול

מבוא

העידן הנוכחי משופע בהגרלות ומשחקי מזל: לוטו, טוטו, פיס וכד', שהזכיה בהם מבוססת על תורת הסיכויים. אלמנט־התחרות ואפשרויות הזכיה, גורמים לעתים קרובות להתמכרות אליהם של בני-נוער ושל מבוגרים כאחד. ישנן טכניקות שונות, המבוססות על הבנת מושג ההסתברות, ואשר מגבירות את סיכויי הזכיה. כשמלמדים את נושא ההסתברות, עומדות לרשות המורה אפשרויות הדגמה עשירות ומגוונות. שילוב משחקי הסתברות בתהליך הלימודי, משפר את ההבנה, מעורר ענין ויוצר הנעה בקרב התלמידים. קביעת ההסתברות הניסויית להתרחשות מאורע מסויים מחייבת חזרה רבת פעמים על אותו ניסוי ועל מיונן של התוצאות שהתקבלו. ביצוע הניסויים גוזל זמן ניכר מהשיעור; על מנת לקצרו אפשר לחלק את הכיתה למספר קבוצות שתבצענה מספר פעמים אותו ניסוי. כך תתקבלנה בפרק זמן קצר תוצאות מספיקות, שתאפשרנה לחשב את ההסתברות בדיוק סביר. שיתוף כל תלמידי הכיתה בביצוע הניסויים תורם הן ליצירת אקלים לימודי וחברתי טוב בכיתה והן להשגת יעדי המורה.

המחשב שבעידן פרוייקט "מחר 98", נעשה כלי שימושי בכיתה, להוראה וללימוד מיגוון רחב של מקצועות ותחומים, עשוי להיות חלופה טובה לביצוע הניסויים, וזאת ע"י סימולציה מתאימה של המשחקים הידניים. תוכנית מחשב, שהוכנה מראש, מאפשרת ביצוע מאות ואלפי ניסויים חוזרים במשך דקות מספר, תוך הצגת תוצאותיהם באופן ויזואלי ודינמי על גבי הצג. ביצוע ניסויים ממוחשבים, מאפשר לשנות בנקל פרמטרים של המשחק ההיסתברותי, ומתוך כך – להתמודד עם אתגרים מתמטיים שונים בקבוצות או בזוגות של תלמידים בעת ובעונה אחת. השימוש במחשב מהווה הזדמנות מתאימה למורה להכיר לתלמיד את הפונקציה RND (רנדום), שמפיקה מספרים אקראיים, בגירסאות שונות של שפות מחשב.

תארנים: *משחקים; הסתברות; מרחב מאורעות; מרחב מידגם; סימולציית מחשבים; מספר אקראי (RND).*

במאמר זה, יוצגו מספר דוגמאות קלאסיות של משחקים הסתברותיים תוך הבאת סתירות, והדגשת היבטים דידקטיים. כן תוצג הצגה ברורה של מרחב המידגם ומרחב המאורע.
הדוגמאות מתאימות לתלמידי חטיבת-הביניים, שוחרי העשרה מדעית, ותלמידי החטיבה העליונה, הלומדים את נושא ההסתברות במסגרת תוכנית הלימודים.

משחקים הסתברותיים

דוגמא מס' 1 – "שלשה כרטיסים"

כרטיס מס' 1 – בשני צדדיו סימנים זהים (למשל [X] , [X]).
כרטיס מס' 2 – צד אחד סימן אחד וצד שני חלק ([X] , [ ]).
כרטיס מס' 3 – שני צדדיו חלקים ([ ] , [ ]).
מערבבים את הכרטיסים ושמים אותם בתוך קופסא. מוציאים ממנה באקראי כרטיס אחד ומציגים אותו לתלמידים. שואלים – האם צדו השני, הבלתי נראה, מסומן או חלק?. אחד התלמידים מתבקש לנחש.
כשמציגים את הכרטיס, יש להפנות את תשומת-לבם של התלמידים לאפשרויות השונות; למשל, אם על הצד הגלוי נראה סימן [X], הרי שכרטיס זה אינו הכרטיס – " [ ] , [ ] ", אלא אחת משתי האפשרויות, כרטיס " [X] , [X] " או כרטיס " [X] , [ ] ", כלומר, צדו השני או שהוא מסומן או שהוא חלק. השאלה היא, מה יותר סביר?

בדרך כלל, עונים מרבית התלמידים, ששתי האפשרויות הללו שוות סיכוי. מאפשרים לתלמידים לשחק פעמים אחדות ולהיווכח, שבממוצע מחצית ממספר המקרים מצליחים התלמידים לנחש מה הופיע בצדו השני של הכרטיס. נכנה את שיטת הניחוש הנ"ל בשם אסטרטגיה א'.

אחר כך, מבקש המורה מהתלמידים לחזור על המשחק עוד כ- 30 פעמים – אולם לאחר הצגת הכרטיס שהוצא מהקופסה מכריזים הם אוטומטית שגם בצד ב' מופיע אותו דבר כמו בצד א' (שהוצג לתלמידים). לפי אסטרטגיה זו (המכונה אסטרטגיה ב') הצליחו התלמידים לזהות נכון בממוצע 2/3 מהמקרים.

ניתן לפעול גם לפי אסטרטגיה אחרת (ג'), כשמכריזים אוטומטית שבצד ב' מופיעה צורה הפוכה לזו המופיעה בצד א'. חזרה על הניסוי בשיטה זו תצביע על כך ששיעור ההצלחה ירד ל - 1/3.

אסטרטגיות ב' ו-ג' אינן מאשרות את ההשערה של אסטרטגיה א' שסיכוייה 1/2, 1/2. הטעות הטיפוסית היא שהתלמידים (ולא רק התלמידים) אינם מביאים בחשבון את כל האפשרויות.

נניח, שנראה צד [X], אזי המשמעות היא שהכרטיס הוא " [X] , [ ] " או כרטיס " [X] , [ ] ". אבל בכרטיס " [X] , [X] " ישנן שתי הצגות אפשריות זהות, לכן הסיכוי להופעת סימן זה בצדו השני הוא גדול פי 2.
כדי שההסבר יהיה ברור ומובן צריך להביא בחשבון את מכלול האפשרויות. יש שלשה כרטיסים

ולכל כרטיס קיימות שתי אפשרויות. סך-הכל ישנן 6 אפשרויות של מרחב המידגם:

צד א' - הצד הנראה

צד ב' - הצד הבלתי נראה

אם מציגים "סימן", ברור שאין אף אחת מאפשרויות 4, 5 ו-6, אלא תהיינה שלש אפשרויות שונות, בצד ב': פעמיים מופיע "סימן" ופעם אחת בלבד "חלק". אם כן, הסיכוי הוא 2/3 לנחש את הצד השני נכון, אם מכריזים בניחוש את אותו הדבר הנראה בצד א' (אסטרטגיה ב'). באופן דומה,הסיכוי להצליח בניחוש הוא 1/3 מהמקרים, אם מכריזים על צורה שונה מזו שבצד א' (אסטרטגיה ג').

אסטרטגיה א' – ניחוש הצד השני באקראי – מאפשרת לנחש בממוצע מחצית ממספר המקרים, כי במחצית הפעמים בממוצע מופיע "סימן" בצדו השני של הכרטיס, ובמחצית הפעמים הוא "חלק" (האסטרטגיה הזאת לא מביאה בחשבון מה יש בצד הנראה - 3 צדדים "מסומנים" ו-3 צדדים "חלקים" מתוך ה-6).

הדוגמא שהוצגה במשחק מאלפת ומעניינת למדי, וזאת משתי סיבות:
הראשונה – אפשר להיווכח בבירור שאופן הצגת הבעיה, או העלילה, משפיע על כושר הבנת התלמידים. מספיק לשנות מעט את השאלה: "מה יותר סביר?" – לקחת כרטיס ששני צדדיו זהים או שני צדדיו שונים. ברור, שבפעם זאת, כל התלמידים יבינו שיש 2 אפשרויות מתוך 3: לקחת כרטיסים ששני צדדיהם זהים ("סימן - סימן" ו-"חלק-חלק"), ויש רק אפשרות אחת לקחת כרטיס שצדדיו שונים ("סימן-חלק"). לפיכך בממוצע 2/3 מהמקרים הכרטיסים זהים בשני צדיהם.

הסיבה השניה - טעות זאת שכיחה מאוד אפילו מתמטיקאים גדולים שגו בפתרון הבעיה. דבר זה ידוע מההיסטוריה. למשל, המתמטיקאי הצרפתי דאלאמבר (D`ALAMBER), שהוא אחד היוצרים הראשונים של תורת ההסתברות, טעה בסוברו, שאם מטילים מטבע פעמיים אזי ההסתברות, שלפחות פעם אחת יתקבל "מספר", היא 2/3. הוא חשב שישנן רק 3 אפשרויות ("מספר-מספר", "מספר-תמונה" ו-"תמונה-תמונה"), ומהן רק 2 אפשרויות ("מספר-מספר" ו"מספר-תמונה") המתאימות למאורע. למעשה ישנן, 4 אפשרויות ("מספר-מספר", "מספר-תמונה", "תמונה-מספר" ו-"תמונה-תמונה") ו-3 מהן מתאימות למאורע, כלומר, התשובה הנכונה היא 3/4, ולא כפי שסבר דאלאמבר שהסתמך על מרחב מדגם לא מלא.

אפשר לפתח תוכנת מחשב פשוטה שתדגים את האסטרטגיות השונות (א', ב', ג'). יוצרים 3 זוגות: (1,0) ו-(0,0) (1:1). מדי פעם בוחרת התוכנה באקראי את אחד הזוגות ובוחרת באקראי אחד מבני הזוג (הראשון או השני) ומציגה אותו על הצג. על התלמיד לנחש מהו המספר השני של הזוג ולהכניס אותו למחשב. אם הניחוש נכון, מציג המחשב נתון מתאים ונספרת זכיה. בסוף המשחק אפשר לראות את התוצאה הכללית.

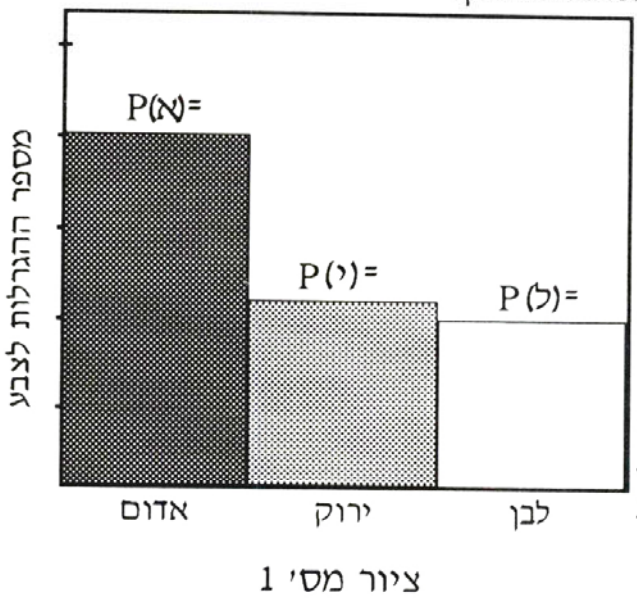
דוגמא מספר 2 – "משחק הכדורים"

בתוך שק נמצאים 41 כדורים: 20 זהים בצבע אדום, 11 זהים בצבע ירוק ו-10 זהים בצבע לבן. מוציאים באקראי כדור מהשק, מציינים את צבעו ומחזירים אותו לשק (דגימה עם החזרה). התלמידים מתבקשים לחשב את ההסתברות של הוצאת כדור בצבע מסוים.

חישוב ההסתברויות פשוט ביותר, משום שמרחב המידגם הוא 41 וגם מרחבי המאורעות ידועים: 20, 11 ו-10. הבדיקה הניסויית להוכחה שאכן ההסתברויות הן:

$P(א) = {}^{20}/_{41}$, $P(י) = {}^{11}/_{41}$, ו- $P(ל) = {}^{10}/_{41}$

מחייבת ביצוע מספר רב של ניסויים, וזאת בשל המספרים הקרובים של הכדורים הירוקים והלבנים.



ציור מס' 1

בעזרת תוכנית מחשב מבצעים את הגרלת הכדורים, מיון הצבעים ומניית הפעמים שהתקבל כל אחד מהצבעים.
התוצאות תוצגנה סימולטנית בדיאגראמה מלבנית דינמית על גבי צג המחשב (ציור מס' 1).
תעשנה הפסקות לפרקי זמן של כדקה: לאחר 50 הגרלות, 100 הגרלות ו-1000 הגרלות).

בהפסקות בין ההגרלות, מצוינת בראש כל עמודה, ההסתברות הניסויית שהתקבלה להוצאת כדור בצבע מסוים.

השוואת התוצאות של מספר קטן של הגרלות, למספר גדול של הגרלות, מצביעה על העובדה, שקביעה מדויקת של ההסתברות מחייבת ביצוע מספר גדול של ניסויים.

בהקניית מידע כללי לתלמידים חשוב לציין, שבמשחק הגרלת כדורים, ממספרים את הכדורים בצבע אדום במספרים עוקבים מ-1 עד 20, את הירוקים מ-21 עד 31 ואת הלבנים מ-32 עד 41. התוכנית עצמה מגרילה מספר מתחום 1-41, ומייחסת אותו לצבע מסוים בהתאם לגודלו המספרי.

אפשר לשנות בתוכנית את כמויות הכדורים בכל אחד מהצבעים, להוסיף כדורים בצבע נוסף

ואף לשנות את מספר ההגרלות.

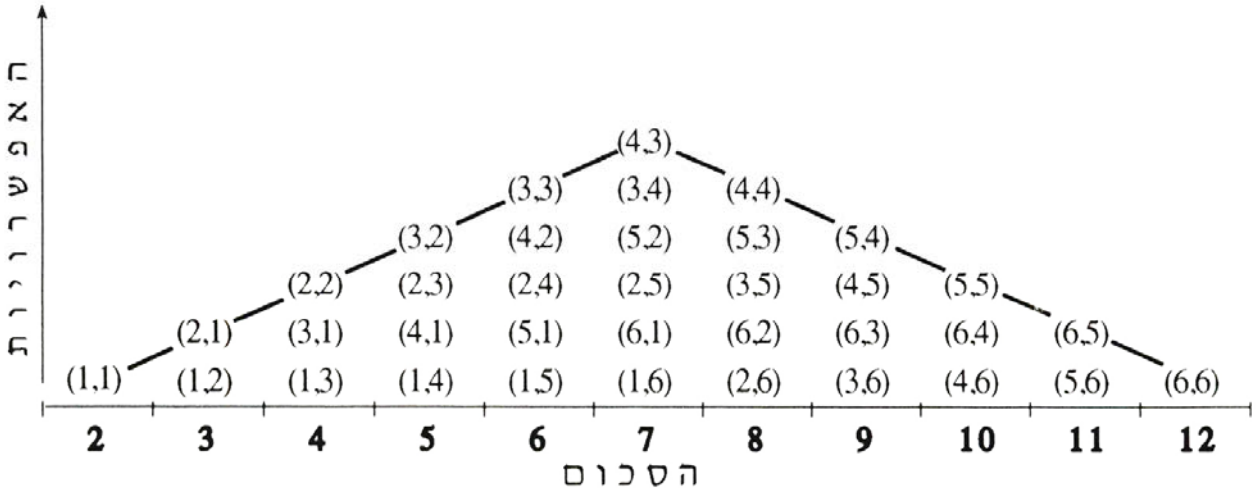
דוגמא מס' 3 – "הטלת 2 קוביות משחק"

מטילים שתי קוביות משחק שונות. השאלה היא: מהי ההסתברות לקבל סכום מסוים?
מרחב המדגם מכיל 36 אפשרויות, כדלקמן:

(1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (1,5) (1,6)
(2,1) (2,2) . . . . . .
(3,1) . . . . . .
. .
. .
(6,1) . . . . . (6,6)

חשוב לציין, שמאחר והקוביות שונות, הרי שהמאורעות (2,5) ו-(5,2), לדוגמא, הם שני מאורעות שונים, ואילו מאורע כדוגמאת (4,4) הוא מאורע יחיד.

קיימים 11 מאורעות שונים של סכום הקוביות, כשהסכום הנמוך ביותר 2 עבור המאורע (1,1) והסכום הגבוה ביותר הוא 12 עבור מאורע (6,6). להוציא את שני הסכומים הקיצוניים לכל שאר המאורעות-הסכומים, ישנן יותר מאפשרות אחת לקבלת הסכום, כפי שמראה ציור 2.



ציור מס' 2

ההסתברויות השונות לקבלת הסכומים השונים רלוונטיות למדי, למשל, לצעדים שמפעילים השחקנים במשחק הקוביות העממי שש-בש. ההסתברות לקבלת סכום 7 גבוהה יותר מההסתברות לקבלת סכום 11 – עובדה שיש לתת עליה את הדעת בשלבי המשחק.

גם במשחק זה, כבמשחק הקודם (דוגמא מס' 2) משתמשים בתוכנית מחשב דינמית, לקביעת ההסתברות הניסויית של כל סכום. לאחר 1000 הטלות (הגרלות) מצביעה התוכנית בבירור, שגרף ההסתברות עולה לינארית מסכום 2 ל-7 ויורד לינארית עד לסכום 12 – בצורה סימטרית מסביב לסכום 7.

דוגמא מספר 4 – "כמה תלמידים בכיתה נולדו באותו יום?"

במבט ראשון נדמה שאכן אין כאלה, כי בשנה ישנם 365 יום ובכיתה, נניח, יש רק 30 תלמידים. במקרה זה האינטואיציה של רוב האנשים מוטעית. מעניין לציין, שבדרך כלל יש בכל כיתה לפחות שני תלמידים שנולדו באותו יום של השנה. ההפתעה יוצרת מוטיבציה להבנת הדבר, במיוחד בקרב תלמידי תיכון, שהם בעלי ידע מספיק להבנת האירוע.

ליום ההולדת של התלמיד הראשון ישנן 365 אפשרויות. ליום ההולדת של השני ישנן 364 אפשרויות, בהנחה שהוא נולד ביום שונה מזה של הראשון, וכך לגבי שאר התלמידים.

ההסתברות ששני הראשונים נולדו בימים שונים היא: $P_2 = \frac{364}{365}$

ההסתברות ששלשת הראשונים נולדו בימים שונים היא: $P_3 = \frac{364}{365} \times \frac{363}{365}$

באופן דומה מקבלים שההסתברות ש-n תלמידים נולדו בימים שונים היא:

$$P_n = \frac{364 \times 363 \times \ldots \times (366-n)}{365^{n-1}}$$

מכאן נובע שההסתברות של המאורע המשלים, דהיינו, שבקבוצה של n תלמידים ישנם לפחות שניים שנולדו באותו יום של השנה היא $q_n = 1 - P_n$. בעזרת נוסחה לחישוב עצרת(!), אפשר להראות שהחל מ-q_n 23 נעשה גדול מ-0.5. פירוש הדבר, שבקבוצה בת 23 תלמידים קיים סיכוי גדול יותר מ-50%, למצוא לפחות 2 תלמידים שנולדו באותו יום של השנה.

הפונקציה q_n עולה די מהר. בקבוצה בת 30 תלמידים קיים סיכוי גדול יותר מ-70% ובקבוצה בת 40 תלמידים הוא כמעט 90%. כלומר, בקבוצה כזו אפשר לאמר בוודאות שישנם לפחות 2 תלמידים שנולדו באותו יום.

ערכי q_n עבור קבוצות שונות נתון בטבלה הבאה:

n	10	15	20	25	30	35	40
q_n(%)	11.7	25.3	41.1	56.9	70.6	81.4	89.1

טבלה מס' 1

להדגמה נוספת של המשחק בכיתה, אפשר גם לחלק לתלמידים דפי נייר חלקים ולבקש מכל תלמיד לכתוב מספר שלם בתחום 400 - 0 וגם לרשום את שמו. המורה אוסף את הדפים ומתברר (סיכוי די גדול!), ששניים מהתלמידים כתבו אותו מספר.

דוגמא מספר 5 – "חלוקת קלפים"

מורה מחלק קלפים חלקים לתלמידים. כל תלמיד רושם על הקלף שקיבל את שמו הפרטי ואת שם משפחתו. המורה אוסף את הקלפים, מערבב אותם ומחלק אותם באופן אקראי לתלמידים. מתברר שלאחד התלמידים הוחזר הקלף שעליו רשום שמו. לצורך השתכנעות, חוזרים על הניסוי פעם נוספת ושוב מתברר שלאחד התלמידים הוחזר הקלף שלו. המשמעות היא, שההסתברות לאירוע (החזרת הקלף האישי) גבוהה ולכן הדבר קרה.

ההסבר המתמטי כדלקמן:

נניח, שבקבוצה n תלמידים, אז ישנן !n אפשרויות לחלק את הקלפים ביניהם. נסמן ב-A(n) את מספר האפשרויות לחלוקת הקלפים כך, שאף לא תלמיד אחד יקבל שוב את הקלף שלו, למשל, בקבוצה של 2 תלמידים A(2) = 1 . נסמן ב- B(n) את מספר האפשרויות לחלוקת הקלפים כך, שלפחות אחד התלמידים יקבל שוב את הקלף שלו. מאחר ש-A(n) ו-B(n) אורעות משלימים, אזי: $A(n) + B(n) = n!$.

בקבוצה של n תלמידים מספר האפשרויות לחלוקת הקלפים כך שבדיוק:

תלמיד אחד יקבל קלף שלו הוא $n\,A(n-1)$

2 תלמידים יקבלו קלפיהם הוא $\binom{n}{2}A(n-2)$

3 תלמידים יקבלו את קלפיהם הוא $\binom{n}{3}A(n-3)$

n -2 תלמידים יקבלו את קלפיהם הוא $\binom{n}{n-2}A(2)$

כולם יקבלו את קלפיהם הוא 1.

לכן האפשרויות לחלוקת הקלפים כך שלפחות תלמיד אחד יקבל שוב את הקלף שלו הן:

$$B(n)=nA(n-1)+\binom{n}{2}A(n-2)+\binom{n}{3}A(n-3)\ldots\binom{n}{n-2}A(2)+1$$

מכאן ההסתברות לקבל שוב לפחות קלף אחד היא $P_n = \frac{B(n)}{n!}$

התקבלה כאן נוסחת נסיגה עבור B(n) . המעבר ממנה לנוסחה ישירה לחישוב B(n), היא בעיה די-קשה. בסיוע מחשב חושבו ערכי B(n) עד ל-n =10 , כפי שמופיעים בטבלה מס' 2.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_n(%)	50	66.7	62.5	63.3	63.2	63.2	63.2	63.2	63.2

טבלה מס' 2

הנתונים בטבלה מראים, שהחל מ- n=3 ההסתברות לקבל פעם נוספת את הקלף שווה ל-63%,

זאת אומרת שהמקרה הסתברותי.

מעניין לציין, שלעיתים קרובות סוברים שההסתברות P_n שואפת ל-1 כשמספר המשתתפים בקבוצה גדל לאינסוף.

הדבר אינו נכון, ואפשר להוכיח ש- $\lim_{n \to \infty} P_n = 1 - \frac{1}{e}$

עובדה זו נראית בבירור מהטבלה הנ"ל החל מ-$n = 6$, בדיוק של ארבע ספרות אחרי הנקודה.

דוגמא מספר 6 – "משחק קזינו"

כאלטרנטיבה לבורסה, למשחקי טוטו, פיס ודומיהם, נתפסים רבים למשחק קזינו, בתקווה שהמזל יאיר להם פנים. להלן נדגים משחק קזינו ואת סיכויי הזכיה בו.
משתתף משלם 1$ ומכריז על מספר מ-1 עד 6 (מספרי קוביה). המפעיל בקזינו מטיל בבת-אחת שלוש קוביות.

פירוט כללי הזכיה:
אם המספר שהוכרז ע"י המשתתף מופיע על אחת הקוביות, מחזירים למשתתף 1$ ועוד 1$ זכיה (דהיינו, הוא מקבל 2$). אם מופיע המספר על 2 קוביות או על 3 קוביות מקבל המשתתף 3$ או 4$ בהתאמה.

מפעיל הקזינו מעודד וממריץ את הקהל להשתתף בציינו, בצבעים ורודים, את הסיכויים לזכות, להלן הסברו.
"אם מטילים קוביה אחת, אזי הסיכוי למשתתף לזכות הוא 1/6. במקרה של 2 קוביות הסיכוי הוא 2/6 ובמקרה של 3 קוביות - 3/6, דהיינו 1/2 "להצליח או להכשל". זהו סיכוי גבוה לזכות (בהשוואה למשחקי מזל אחרים), וקדימה לשחק!." רבים מתפתים, כי האינטואיציה בראשית המשחק מטעה אותם. באופן דומה, המורה בכיתה יכול לשכנע את תלמידיו בדבר "הסיכויים הטובים" לזכות בקזינו כזה. ניתוח אמיתי ומעמיק יראה לתלמידים כמה כסף ניתן להפסיד אם ישחקו מספר רב של פעמים.

ניתוח הסיכויים במשחק הקזינו – בהטלת 3 קוביות מתקבלות 6 x 6 x 6 = 216 אפשרויות (מרחב המידגם). מספר המקרים שבהם קוביה מסוימת נופלת על מספר נתון ואילו שתי הקוביות האחרות נופלות על מספרים שונים מהמספר הנתון הוא 5 x 5 = 25.
מאחר וישנן 3 קוביות שונות הרי 3 x 25 = 75 הוא מספר המקרים שקוביה **אחת בלבד** מבין השלוש נופלת על מספר נתון. מספר המקרים **שבדיוק שתי קוביות מבין השלוש** תפולנה על מהמספר הנתון הוא 3 x 5 = 15. כן, יש להוסיף את המקרה היחיד שכל ה-3 נופלות על המספר הנתון. כלומר סך-הכל ישנן 91 אפשרויות (1 + 15 + 75) מתוך 216 אפשרויות לקבלת המספר הנתון על קוביה אחת לפחות. המשמעות של אפשרויות הנ"ל היא, שהסיכוי להצלחה הוא 91/216, כלומר, פחות מ-50%.

משתתף המשלם 216$ משחק 216 פעמים, לפי הסיכוי הנ"ל וכללי הזכיה, הוא עשוי לזכות ב-91 הצלחות, בסך כולל של 199$ = 2 x 75 + 3 x 15 + 4 x 1, והפסדו יסתכם ב-17$.

במידה ודמי ההשתתפות למשחק יהיו גבוהים יותר כן ההפסד יהיה גבוה יותר ובעל הקזינו יצחק בדרך אל הבנק.

סיכום

את הוראת נושא ההסתברות בכיתה, אפשר לגוון ע"י שילוב הדגמה ותירגול של משחקי הסתברות שונים. כגון: הפעלת התלמידים בפעילויות מגוונות: עבודה בקבוצות או בזוגות, בעזרת קוביות, כדורים ושימוש במחשב. שימוש במחשב ע"י סימולציה של המשחקים הידניים (כרטיסים, קוביות, מטבעות וכד'), מאפשרת המחשה ויזואלית מהירה של התוצאות.

מראי מקום

Gardner, M. (1982). Paradoxes to Puzzle and delight. W.h. Freeman and Co. San Francisco.

Szekely, G.J. (1986). Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics. Akademiai Klado, Budapest.

Varga, T. (1981). On Probability. Southern Illinois University. Edwardsville Div. of Education.