פדגוגיה להוראה ולמידה בעזרת מרלו (MERLO):
הניסיון המצטבר בהערכה והוראה של חשיבה מושגית

פרדינדנו ארזרלו
אורנלה רובוטי
אורי שפריר
מאשה אטקינד
רון קנת

Prof. Ferdinando Arzarello
Professor of Elementary Mathematics from a Higher Standpoint at Turin University, President of ICMI (2013 – 2016), President of ERME (2009 – 2013); Member of PME IC (2004 – 2009). His main area of research is Mathematics Education, more precisely: the learning of pre-algebra and algebra, geometry, and calculus in technological environments; embodiment and gestures in mathematics; curricular design and theoretical frameworks for learning and teaching. In the last two decades he has authored more than 130 publications, mainly in international Journals or Volumes.

Prof. Ornella Robutti
Professor of Mathematics Education at the Department of Mathematics at Turin University. Her fields of research are: the teaching and learning processes in Mathematics with the support of technologies; the professional role of mathematics teachers as individuals and in communities. She is author of many articles, chapters, proceedings papers in her research field and has been team leader/lecturer/participant in many international congresses. She is member of CIIM Commission (http://www.umi-ciim.it/) in UMI (Italian Mathematical Union), the person in charge of: the GeoGebra Institute of Turin, the project of teachers' professional development Piano Lauree Scientifiche in Piedmont; the project Liceo Matematico; the national congress DIFIMA.

Prof. Uri Shafrir
Associate professor in the Department of Human Development and Applied Psychology, and Director of Adult Study Skills Clinic at Ontario Institute for Studies in Education at the University of Toronto. His recent research focuses on concept parsing algorithms in various knowledge domains and on pedagogy for deep comprehension of conceptual content. Shafrir received a doctorate in mathematical sciences from the University of California at Los Angeles in 1962 and a doctorate in developmental psychology from York University, Toronto, in 1987. Before moving to the University of Toronto, he was founder and director of the Institute of Planetary and Space Science at Tel-Aviv University, and Adjunct Professor at the University of Wisconsin and Columbia University.

Prof. Masha Etkind
Professor in the Department of Architectural Science at Ryerson University. She teaches design, theory and history of Western architecture. Her recent research focuses on conservation of cultural heritage of built form, on language and roots of living architecture in different cultures, and on instruction for deep comprehension of conceptual content in architectural education. Etkind received a professional degree in architecture from St. Petersburg University of Architecture and Engineering, and Masters in Architecture from the University of Toronto. Etkind is a member of the Royal Architectural Institute of Canada.

פרופ׳ רון קנת[1],
יו״ר קבוצת **KPA** ועמית מחקר בכיר במוסד נאמן בטכניון. שימש פרופסור מחקר באוניברסיטת טורינו ופרופסור מן המניין באוניברסיטת מדינת ניו יורק-בינגהמטון. חיבר 12 ספרים ומעל 250 מאמרים בנושאי סטטיסטיקה יישומית, ניהול איכות, הוראת הסטטיסטיקה, סקרי שביעות רצון, ניסויים ובקרת תהליכים סטטיסטית. נשיא לשעבר של האיגוד הישראלי לסטטיסטיקה ושל **ENBIS**, האיגוד האירופאי ליישומי סטטיסטיקה בתעשייה ועסקים. עורך ראשי של האנציקלופדיה המקוונת לסטטיסטיקה של **Wiley, StatsRef** ושל מספר כתבי עת בין-לאומיים. זכה ב-2013 במדליית גרינפילד של האיגוד האנגלי לסטטיסטיקה על תרומה ייחודית לסטטיסטיקה יישומית, מדליה שמוענקת פעם ב-4 שנים. בעל תואר ראשון במתמטיקה מאימפריל קולג׳, לונדון, ודוקטורט במתמטיקה ממכון וייצמן.

1. ron@kpa-group.com

תקציר

פדגוגיה להוראה של מושגים במתמטיקה וסטטיסטיקה, ושיטות לבחינת מידת ההבנה המושגית על בסיס הערכה מעצבת, משמשות אתגר בעל משמעות במדינות ותרבויות שונות. המחקר המוצג כאן הוא תוצאה של שיתוף פעולה בין-לאומי מתמשך בנושאי חינוך בעזרת כלי מתודולוגי חדשני ודידקטי ששמו מרלו (MERLO: Meaning Equivalence Reusable Learning Object). מרלו מאפשר הערכה של מידת ההבנה המושגית של לומדים באמצעות ייצוגים חלופיים. כלי זה מספק הזדמנויות להבהרה מושגית וליצירת דיון על מושגים בקבוצות קטנות ובמסגרת כיתתית. פריטי מרלו מספקים למורה גישה חינוכית מודרנית המאפשרת התמקדות במושגי יסוד ובגיבוש גבולות הבנה המבחינים בין חלופות ייצוגיות עם משמעות דומה ובין חלופות עם דמיון בייצוג אבל עם משמעות אחרת. בגישה זו המורה מנחה דיון המכוון לקידום הבנה מושגית ומאפשר הערכה מעצבת המספקת משוב גם ללומדים וגם למלמדים. המאמר יציג את עקרונות מרלו עם מספר דוגמאות. האמירה העיקרית כאן היא שפריטי מרלו ופדגוגיה מבוססת מרלו יכולים לשמש לקידום הוראה וחשיבה מושגית בכל תחום דעת שהוא.

מילות מפתח: הבנה מושגית; הערכה מעצבת; פדגוגיית מרלו; גבולות הבנה.

מבוא

הבסיס לעבודה זו הוא כלי פדגוגי ואמצעי הערכה מעצבת שפיתחו אורי שפריר ומאשה אטקינד עם יישום בתחומי דעת שונים, כולל מתמטיקה וסטטיסטיקה (Etkind, Kenett, & Shafrir, 2010). הכלי הדידקטי נקרא מרלו (MERLO: Meaning Equivalence Reusable Learning Object). מרלו מאפשר הערכה של מידת ההבנה המושגית באמצעות ייצוגים חלופיים של משפט מטרה. פריטי מרלו הם בסיס לפעילות מובנית שנתמכת באלמנטים פדגוגיים למיניהם. פריט מרלו מכיל חמישה ייצוגים שונים, כמה מהם עם משמעויות שוות ערך למשפט המטרה, וכמה מהם עם משמעות אחרת אבל עם נראות דומה למשפט המטרה.

מאמר זה אינו מתמקד במשמעות של מושגים מתמטיים, נושא שעומד בפני עצמו. דיון מפורט בתחום זה נמצא בספרם של קילפטריק, הוילס ושקובסמוס (Kilpatrick, Hoyles, & Skovsmose, 2005). בדרך כלל קיימת הבחנה בין מעגלי יישום שבהם מושגים מתמטיים מקבלים משמעויות אחרות. בפועל, מושגים המתמטיים משמשים יצורים או אובייקטים תרבותיים המונגשים באמצעות חלופות ייצוגיות (ייצוגים סמיוטיים) (Duval, 2006). מערכות סמיוטיות מסוג זה משמשות אבן יסוד לפעילות מתמטית ולהבנה על רקע מעגלי הבנה מתמטיים (Arzarello, 2006; Johnson-Laird ,1983; Leung, Graf, & Lopez-Real, 2006; Sfard, 2000).

בחינוך מתמטי המבוסס על ייצוגים סמיוטיים, ההתאמה בין ייצוגים חלופיים של אובייקטים מתמטיים ברגיסטרים סמיוטיים, היא אבן יסוד בהבנה המושגית. אחת המטרות בחינוך מתמטי היא להקנות לתלמיד יכולת לעבור מייצוג אחד לייצוג אחר כששניהם עם משמעויות דומות. לדוגמה, הלומד צריך להיות מסוגל לעבור מייצוג של פרבולה בעזרת נוסחה מתמטית לייצוג גרפי. יכולת זו מוגדרת במבחני הערכה בין-לאומיים (PISA, TIMMS) ולאומיים (למשל z באיטליה). חשוב להתמקד ביכולת זו הן בפיתוח תוכניות לימוד וספרי לימוד, והן בהוראת מתמטיקה ולמידתה בכלל, שני תחומי יישום של MERLO.

דובאל (Duval, 2006), מבחין במחקר מקיף בין שני סוגי מעברים בין יחידות רישום בתודעה (רגיסטרים): אלה בין רגיסטרים לסוגיהם שהוא מגדיר **כהמרה**, ואלה על יסוד אותו רגיסטר שהוא מגדיר **כטיפול**. מבחינתו, מעברים אלה מספקים את מהות ההבנה המתמטית. בחינת מעברים אלה, מנקודת הראייה הסמיוטית, מציפה **חסמי מעבר** (Duval, 1983). חסמים אלה באים לידי ביטוי כאשר תלמיד מתקשה לזהות את אותו אובייקט מתמטי בייצוגים חלופיים או שאינו מזהה תכונות שונות בייצוג מסוים. פישביין (Fischbein, 1987) חקר את הקושי בזיהוי ייצוגים חלופיים עם משמעות דומה בתחום הלמידה, והוא הסביר את הקושי בהטיה אינטואיטיבית הנשענת על ניסיון מצטבר או חוקים אמפיריים, כגון "אובייקט ספציפי אינו יכול להיות נוכח, בו זמנית, בשני ייצוגים שונים". הטיות מסוג זה מייצרות חסמים בהבנת מושגים מתמטיים למיניהם.

חקירה מעמיקה של **חסם המעבר** בין ייצוגים מייצוגים שונים מאפשרת הבחנה בין שלושת המצבים האלה:

1. ייצוגים חלופיים בשפות ייצוג למיניהן, כמו למשל נוסחה מתמטית וגרף (ראה דוגמת הפרבולה בהמשך – איור 3).
2. ייצוג אובייקט בשני רגיסטרים דומים אך לא זהים, למשל הספרה "4" בסדרות 1, 2, 3, 4, ... ו-1, 4, 9, 16, ...
3. ייצוגים חלופיים עם משמעות אחרת באותו רגיסטר ייצוגי, למשל $y = x^2$ ו- $y = x$.

התמודדות עם חסמים להבנה של ייצוגים חלופיים משמשת אתגר בעל משמעות לחוקרים בתחום הפדגוגיה המתמטית.

היבט אחר לשימוש בייצוגים חלופיים נובע מהאזנה לשיח מומחים בתחומים מגוונים. אופייני שבשיחות אלה השתמשו בייצוגים חלופיים כדי לקדם הסבר של מושג כלשהו. החלופות מוצגות לעיתים בשפות ייצוג שונות, כגון מלל, דיאגרמות, נוסחאות, תנועת ידיים וכדומה. כמו כן, שיח מומחים מסוג זה משתמש בתבניות שונות, כולל הקשרים ביניהן. בדיון מסוג זה נדרשים יכולת, ניסיון והבנה המאפשרים הצגת מושגים למיניהם בחלופות ייצוגיות עם משמעות דומה.

פריטי מרלו מספקים למורה כלי מעשי וקונקרטי המאפשר התערבות דידקטית בכיתה כדי לקדם במוצהר הבנה מושגית. כל זאת מתוך ניגוד לגישה המקדמת הבנה מושגית כתוצר משני ולא כמטרה חינוכית בפני עצמה.

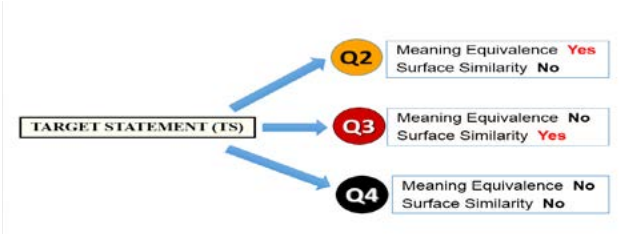
בהמשך נציג מתודולוגיה דידקטית המבוססת על פריטי מרלו. בסעיף 2 נציג ספציפית פיתוח פריטי מרלו לשימוש בהוראת המתמטיקה בחטיבות עליונות בבתי ספר באיטליה. סעיף 3 עוסק בשימוש בפריטי מרלו ככלי דידקטי בעת דיונים יחידניים וקבוצתיים בכיתה וכאמצעי להערכה מעצבת המספקת משוב ללומדים ולמורים. בסעיף 4 נציג מסקנות מגוונות הנובעות מהניסיון הנרכש בשימוש בפריטי מרלו, כולל היכולת ליישם את הגישה לרוחב. האמירה העיקרית שלנו היא שפריטי מרלו יכולים לשמש לקידום הוראה וחשיבה מושגית בכל תחום דעת.

תכנון מסגרת פדגוגית על בסיס פריטי מרלו

לפני שנציג את התכנון והשימוש במרלו, נפרט את התכולה של פריטי מרלו: בשלב הראשון, תחום הדעת שמשמש נשוא העניין מפורק ליחידות המשמשות משפטי מטרה (TS-Target Statements). בעיקרון, תחום הדעת מורכב מאוסף של משפטי מטרה שבכללותם מספקים כיסוי שלם לתחום הדעת; בשלב השני מפתחים חלופות

ייצוגיות למשפט המטרה. ייצוגים עם משמעות דומה, בשפות ייצוג שונות, נקראים 2Q. ייצוגים הנראים דומים למשפט המטרה אבל עם משמעות שונה נקראים 3Q. ייצוגים עם נראות ומשמעות שונה ממשפט המטרה נקראים 4Q.

תבנית לפיתוח יחידות מרלו המרכיבות פריט מרלו, מוצגת סכמטית באיור 1. דוגמאות ליישום התבנית בתוכנית לימודי המתמטיקה באיטליה אפשר למצוא בתוך מאמרו של רובוטי (Robutti, 2015).



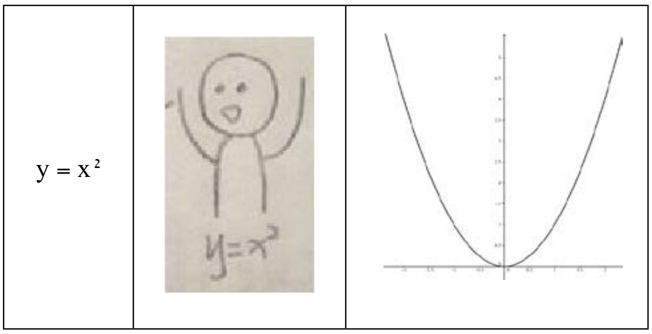
איור 1: תבנית לסוגי יחידות המשתלבות בפריט מרלו

דוגמה למשפט מטרה ושני ייצוגים מסוג 3Q בשפה ייצוגית מסוג מלל מפורטת באיור 2.

TS	3Q	3Q
האיש הסתכל על הנער הצעיר אשר שיחק עם הכדור	האיש ששיחק עם הכדור הסתכל על הנער הצעיר	הנער הצעיר הביט באיש אשר שיחק עם הכדור

איור 2: חלופות ייצוגיות למשפט מטרה עם נראות דומה ומשמעות שונה (יחידות 3Q)

ייצוגים חלופיים עם משמעות שווה מבוססים על שימוש בשפות ייצוג מגוונות. איור 3 מציג דוגמה מסוג זה בהקשר מתמטי.



איור 3: חלופות ייצוגיות למשפט מטרה (בצד ימין) עם נראות שונה ומשמעות דומה (יחידות 2Q)

תכנון פריט מרלו מבוסס על שילוב יחידות מסוגים 2Q, 3Q ו-4Q הסובב על משפט מטרה מסוים (TS).

פריט מרלו כולל תמיד ייצוג של יחידת TS, ולפחות ייצוג אחד מסוג 2Q ו 3Q.

להלן הנחיות למשיב שמופיעות בכל פריט מרלו:

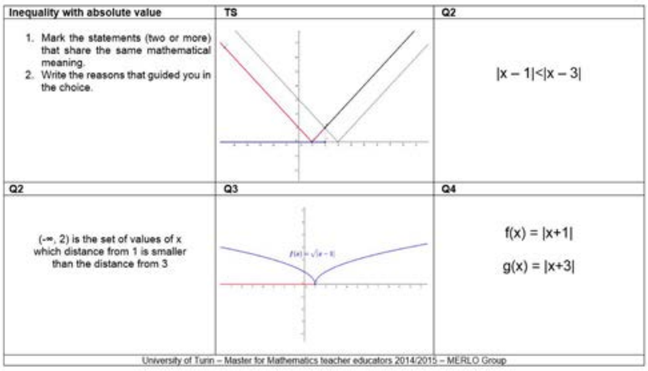
לפחות לשניים – אולי ליותר משניים – מבין חמשת המשפטים האלו יש משמעות שוות-ערך.

1. סמן את כל המשפטים בעלי משמעות שוות-ערך – אבל רק אותם!
2. נסח בקיצור את הסיבות שהביאו אותך לבחור במשפטים אלו.

במקום השמור להנחיות הנ"ל, יש שלוש שורות ריקות המאפשרות למשיב לציין בכתב יד את הסיבות שהביאו אותו לציין את הבחירה שביצע.

בעת לימודי הוראה מתקדמים, המיועדים למורים מנוסים שמגיעים לאוניברסיטה בטורינו ללימודי תואר שני, מתקיימת סדנה לפיתוח פריטי מרלו. לימודים אלה מעשירים את בסיס הנתונים של פריטי מרלו המותאמים להוראת המתמטיקה בחטיבה העליונה בבתי ספר באיטליה כולה (למידע על כך ראה Arzarello, Kenett et al., 2015; Arzarello, Robutti, & Carante, 2015).

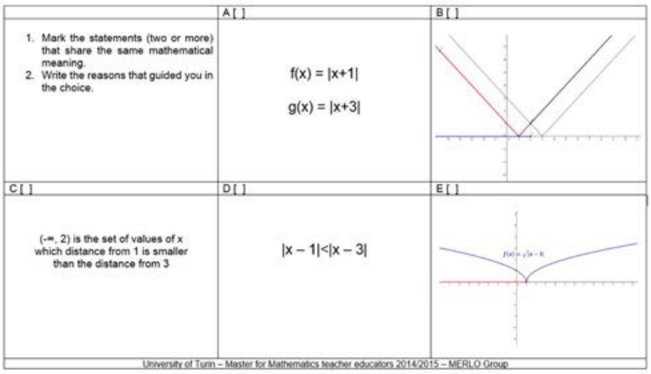
פריט המרלו באיור 4 משמש דוגמה לפריט מרלו שפותח במסגרת הסדנה הנזכרת לעיל:



איור 4: פריט מרלו בתחום אלגברה בנושא אי שוויון בערכים מוחלטים (פריט מפוענח לטובת המורה)

חשוב להדגיש שאין בייצוגים החלופיים ייצוג שגוי. יחידות 3Q ו-4Q נמצאות מחוץ לגבול ההבנה של משפט המטרה, ולכן מתחמים את ההבחנה בין חלופות עם משמעות שווה וחלופות עם משמעות שונה. גבול זה נקרא באנגלית Boundary of Meaning (BOM).

סיווג יחידות מרלו לקבוצות שבאיור 1 אינו שקוף למשיב שמתבקש לציין חלופות ייצוגיות עם משמעות דומה על בסיס חלופות ייצוגיות המסומנות סתמין A-E, ראה איור 5.



איור 5: פריט מרלו בתחום אלגברה בנושא אי שוויון בערכים מוחלטים (פריט לתלמיד)

פריטי מרלו מאפשרים הבחנה מובנת של מידת ההבנה של הלומד ומספקים משוב למורה על איך התקבלו בידי התלמידים כל מיני נושאים בתוכנית הלימודים. משוב זה חשוב גם למתכנני הקורסים, חומרי הלימוד ושיטת העברה של חומר לימודי זה או אחר. ראיה משולבת זו מספקת מסגרת כוללת הנקראת פדגוגיה מבוססת מרלו. הנספח מציג דוגמאות לפריטי מרלו המשמשים בהוראת טריגונומטריה וגאומטריה.

פדגוגיה מבוססת מרלו

השימוש בפריטי מרלו אינו שלם ללא תפיסה חינוכית הולמת. בסעיף זה נציג כמה דוגמאות יישום הנובעות מניסיון היישום באיטליה. מרכיב חשוב בפדגוגיה מבוססת מרלו הוא קיום חידון שבועי והכללת בוחן מרלו בבחינות אמצע שנה וסוף שנה. חידון שבועי דורש 20 דקות בערך, וכולל את ארבעת השלבים האלה

(בערך חמש דקות כל אחד):

שלב 1 – דיון בקבוצה קטנה: הקרנה של פריט מרלו כאשר התלמידים מתבקשים ליצור קבוצות דיון קטנות ולדון במרלו המוקרן.

שלב 2 – תגובת הפרט: כל תלמיד מסמן לבד לפחות 2 מתוך 5 יחידות בפריט. הנתונים מועברים בהודעות כתובות או באמצעי אחר והמורה מציגה אותם במרוכז. כמו כן התלמיד ממלא כמה שורות עם הסבר לבחירה שביצע.

שלב 3 – דיון בתוצאות: המורה מנהל דיון קבוצתי על בסיס תשובות התלמידים, כולל התיאור המילולי של המושגים הרלוונטיים, וכן שאלות על המשמעות של כל ייצוג.

שלב 4 – דיון בכיתה: המורה ממשיך את הדיון ומתמקד בסיבות בחירה או אי בחירה של כל אחת מחמש יחידות המרלו על בסיס תובנות משותפות.

בחינת הסימונים ב-5 היחידות עם הייצוגים השונים מאפשרת חישוב ציון בין 0 ל-5, כאשר סימון של רק TS ו-2Q מזכה בחמש נקודות. סימון של יחידות 3Q ו-4Q מוריד מהניקוד. את משפטי המלל נהוג להעריך עם ציון המבטא את בהירות ההסבר בעזרת ציון שגם הוא בין 0 ל-5.

דוגמה לציונים מפריטי מרלו בעשרה תחומי דעת במתמטיקה מופיעה באיור 6: המשתנה N מייצג את מספר המשיבים; המשתנה *N נוגע למספר התלמידים שלא השיבו שמספר התלמידים בכיתה הוא N + *N; העמודה Mean מציגה את הציון הממוצע לכיתה כששתי העמודות האחרונות מבטאות ערכי מינימום ומקסימום.

Variable	N	N*	Mean	Minimum	Maximum
Percentages	42	2	3.500	0.000	5.000
Fractions	29	0	4.172	2.000	5.000
Powers	49	1	2.531	1.000	5.000
Transition	43	1	3.930	2.000	5.000
Line	38	7	4.158	0.000	5.000
Inverse proportions	42	0	3.762	1.000	5.000
Circumference	44	2	3.500	1.000	5.000
Angle	18	1	4.444	2.000	5.000
Function	24	0	3.167	1.000	5.000
Equations	23	1	3.130	2.000	5.000

N* represents missing data

איור 6: ציונים לפריטי מרלו בעשרה תחומי דעת במתמטיקה

מאיור 6 עולה שרמת ההבנה שהושגה בתחום **הזוויות** גבוהה במיוחד (ממוצע 4.44). כנגד זה, תחום **החזקות** קיבל ממוצע נמוך במיוחד (2.53). כפי שצוין, במשוב זה יש מידע בעל חשיבות גדולה למורה ולמתכנני חומרי הלימוד.

פדגוגיית ההוראה על בסיס פריטי מרלו גמישה ומאפשרת התאמה לנושא ולכיתה. להלן דוגמה לתבנית הוראה בכיתה הכוללת:

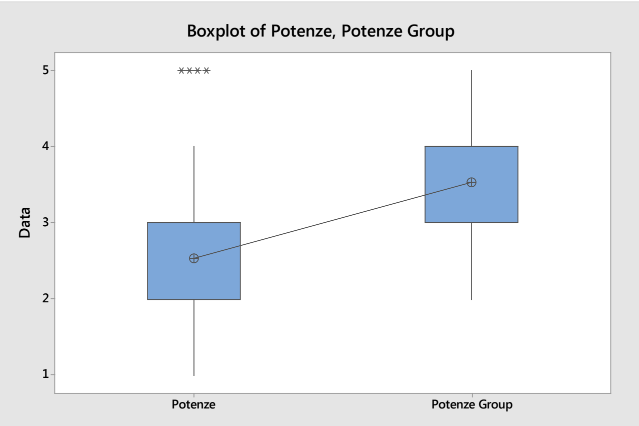
א. עבודה עצמית: כל תלמיד מקבל שניים עד ארבעה פריטי מרלו על גיליונות מודפסים. לכל תלמיד יש בערך 20 דקות למחשבה ולסימון פריט המרלו. לאחר מכן המורה אוסף את הגיליונות.

ב. עבודה קבוצתית: התלמידים מחולקים לקבוצות ודנים בתשובות האישיות שסימנו בשלב הקודם. כל קבוצת תלמידים מקבלת שוב את אותם פריטי מרלו ללא סימון. לקבוצות יש עשרים דקות בערך כדי להשוות בין התשובות האישיות ולנהל דיון בעניין זה, ולאחר סיום הדיון, כל תלמיד מסמן תשובה סופית. חשוב שהתלמידים ירגישו חופשי לדבר על הרעיונות שלהם זה עם זה ולדון בהם, כי מניסיון עדיף ליצור קבוצות הומוגניות. המורה אוסף את פריטי המרלו מכל תלמיד בסיום העבודה הקבוצתית.

ג. דיון מסכם: עשרים הדקות האחרונות של השיעור מוקדשות לדיון מסכם. המורה מציג לכולם את התשובות של כל קבוצה, ובדיון נבחנות נקודות מבט אחרות. המטרה הסופית היא לא להציג תשובות נכונות, אלא להדגיש את הרעיון של גבול של משמעות (BOM) הסובב על משפט מטרה וייצוגים אחרים עם משמעות מתמטית שווה ערך.

באיור 7 מוצגת השוואת ציוני מרלו בתחום **החזקות** בסיום העבודה העצמית (נתונים אלה הוצגו באיור 6) ולאחר העבודה הקבוצתית. העבודה בקבוצה העלתה את הציונים בנקודה שלמה כאשר מובהקות השיפור עם ערך P קטן מ-0.004 (תוצאה מובהקת מאוד). ממצא זה מראה איך במקרה זה עבודה קבוצתית מקדמת הבנה לעומק. בפועל, לעבודה הקבוצתית הייתה השפעה רבה מבחינה פדגוגית.

השימוש בפריטי מרלו ככלי לקידום פעילות בקבוצה, ממחיש את חשיבות למידה מובנית (Vygotsky, 1934). נוסף על כך, פריטי מרלו מספקים נתונים להערכה מעצבת שמשמשת משוב חשוב הן למורים והן לתלמידים.



איור 7: התפלגות ציוני מרלו בנושא חזקות בעבודה עצמית (שמאל) ולאחר עבודה בקבוצה (ימין)

באופן ספציפי יותר אפשר לחשב ציון נפרד לפריטי 2Q ו-3Q. ציונים נמוכים בחתך זה משקפים כל מיני קשיים בהבנה המושגית:

א. ניקוד נמוך ב-Q2 מציין כי הלומד נכשל בקביעת הגבול של משמעות של מושגים מתמטיים הסובבים על ייצוגים עם משמעות שווה ערך למשפט מטרה. חלופות אלו אמורות להיות מאובחנות כבתוך גבול המשמעות (BOM).

ב. ניקוד נמוך ב-Q3 מציין כי הלומד לא הבחין כראוי בייצוגים חלופיים עם דמיון בנראות למשפט המטרה אבל עם משמעות שונה. חלופות אלה אמורות להיות מחוץ לגבול המשמעות (BOM).

להלן מופיעים כמה ציטוטים מתוך שיחות בין תלמידים שהתקיימו בקבוצת דיון. הדוגמאות נלקחו מתוך דיון קבוצתי בין שלושה תלמידים (להלן "א", "ב" ו-"ג") שפותרים את פריט המרלו שמוצג באיור 5:

א: "מצאתי מיד את דמיון בין D ו-B: אי השוויון והייצוג הגרפי. בגרף עם הערך המוחלט ב-B החלק של מינוס אינסוף ל-2 מודגש. אז קישרתי את B ל-C."

ב: "בדיוק, עשיתי את אותו הדבר."

ג: "אה, אני לא סימנתי את C. למה סימנת את זה?"

א: "כי כתוב ... התלמיד מקריא את הטקסט ביחידה C (ומצביע על B)."

ג: "כן, אבל אני לא באמת יודע למה C קשור ל-C. D הוא שווה ערך ל-D ו-B."

א: "C הוא ההסבר במילים של אי-השוויון."

ב: "כאן (מצביע על D) אתה חייב למצוא את x לפתור את אי-השוויון הזה."

א: "חשבתי על C כשראיתי שיש את אותו דבר."

ג: "יש דרכים שונות לראות את אותו הדבר."

א: "זה מאוד נחמד כשאתה מבין את זה."

ג: "כן."

את הניתוח הסמיוטי אפשר למקד בשפות הייצוג ובמשמעות מושגית לפי משפטי המטרה. בעת תהליך הלמידה ההישענות רק על הסטימולוס הוויזואלי אינה מספקת עקב הטיה מובנית (Husserl, 1931; Levinas, 1989). לפיכך האתגר של הלומד הוא לבחון ייצוגים בהקשר תרבותי עם מטרה ספציפית (Radford, 2010).

שילוב שפות ייצוג מגוונות מאפשר למידה לעומק של ביטויים מתמטיים מורכבים כפי שציין דובאל (Duval, 2006) במחקרו. כמו כן, קלמן, מסאי וסון (Kellman, Massey, & Son, 2010) הראו שהנחייה נכונה מאפשרת לתלמיד לזהות מהר וכיאות את התכונות המאפיינות ביטויים מתמטיים. בסעיף להלן נציג מסקנות מיישום פריטי מרלו ככלי מתודולוגי בהוראת המתמטיקה עם השלכות על תחומים אחרים.

מסקנות מיישומי מרלו

בסעיף 2 הוצגה המסגרת הכללית של מרלו, כולל פיתוח פריטי מרלו המשמשים בהוראת המתמטיקה. בסעיף 3 הוצג השימוש במתודולוגיה מבוססת מרלו ככלי לפעילות קבוצתית ולהערכה מעצבות. נציג כאן כמה תובנות מתוך הניסיון שהצטבר באיטליה, שהשפיעו על תחומי יישום אחרים.

מתודולוגיית מרלו מאפשרת טיפול דידקטי בחסמי מעבר. במובן זה, מרלו משמשת פדגוגיה ייחודית ועד כה לא הוצגה חלופה מעשית המאפשרת זאת. השימוש בפריטי מרלו גורם לתלמיד להתמקד במעברים בין רגיסטרים ובכך לקדם חשיבה מושגית מתוך דיון ממוקד בנושא. התמודדות פרואקטיבית חדשנית זו הביאה לידי תוצאות מרשימות בהמחשה מחודשת מהתחום הפנומנולוגי שהעדיף לדון במישרין בחסמי מעבר (Roth, 2001).

סיבות השורש הקוגניטיביות לקשיים בהתמודדות עם חסמי מעבר משוקפות היטב במרכיבים המגוונים של פריטי מרלו. מכאן שפדגוגיה מבוססת מרלו מסייעת מאוד לתלמיד בהתמודדות זו. כמו כן המשוב המתקבל מההערכה המעצבת שמספקים ציוני מרלו משמש משוב חשוב למורה.

דובאל (Duval, 1983, 2006) טוען כי תהליכי טרנספורמציה והמרה בין רגיסטרים מגוונים של מושגים ואובייקטים מתמטיים ובכל אחד מהם מספקים את הליבה של ההבנה המתמטית. שימוש בפריטי מרלו מספק סביבה דידקטית המכוונת לקידום הבנה זו.

נוסף על כך, תוכניות הערכה כמו פיזה שבאות לבחון יכולות של תלמידים באוריינות מתמטית, ממוקדות במסוגלות התלמיד לבחור בייצוג נכון של אובייקטים מתמטיים כדי לפתור בעיות או לאפשר דיון בנושא מתמטי. הגישה שמייצגים פריטי מרלו תואמת גם את היוזמה בארה"ב שמקדמת שימוש בקבוצות דיון קטנות (Watkins & Mazur, 2013).

השימוש בפריטי מרלו ובפדגוגיה מבוססת מרלו, התרחב בשנים האחרונות למספר רב של יישומים. להלן רשימה חלקית:

1) האקדמיה הרוסית למדעים (מתמטיקה, פיזיקה, ביולוגיה); 2) אוניברסיטת טורונטו (הכשרת המורים, פסיכולוגיה התפתחותית, ניהול פרויקטים); 3) מכללת ג'ורג בראון (אנגלית כשפה שנייה); 4) מרכז למידה עצמאית של טלוויזיית אונטריו (מתמטיקה); 5) מרכז אונטריו למצוינות בייצור (ניהול, עסקים); 6) אוניברסיטת טורינו (תוכניות מתקדמות בהכשרת מורים). (למידע נוסף ראה Arzarello, Robutti et al., 2015; Etkind & Shafrir, 2013; Shafrir & Etkind, 2006).

בדוגמה אחרת משנת 2002, מאשה אטקינד מלמדת אדריכלות באוניברסיטת ריירסון בטורונטו בעזרת מרלו באמצעות מערכת לומדה מקוונת בשם בריי<u>טספים</u>.

לסיום, וכפי שצוין בתקציר, האמירה המרכזית שלנו היא שפריטי מרלו ופדגוגיה מבוססת מרלו יכולים לשמש לקידום הוראה וחשיבה מושגית בכל תחום דעת שהוא.

רשימת מקורות

Arzarello, F. (2006). **Semiosis as a multimodal process**. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue*, 267-299.

Arzarello, F., Kenett, R. S., Robutti, O., Shafrir, U., Prodromou, T., & Carante, P. (2015). Teaching and assessing with new methodological tools (MERLO): A new pedagogy? In M. A. Hersh & M. Kotecha (Eds.), *Proceedings of the first IMA international conference on barriers and enablers to learning maths: Enhancing learning and teaching for all learners* (pp. 1-8). Glasgow, Scotland.

Arzarello, F., Robutti, O., & Carante, P. (2015). MERLO: A new tool and a new challenge in mathematics teaching and learning. In K. Beswick, T. Muir, & J. Fielding-Wells (Eds.), *Proceedings of the 39th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 57-64). Hobart, Australia: PME

Duval, R. (1983). L'obstacle du dedoublement des objets mathematiques. *Educational Studies in Mathematics, 14*(4), 385-414. doi: 10.1007/BF0036823

Duval, R. (2006). **A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics**. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 103-131. doi: 10.1007/s10649-006-0400-z

Etkind, M., Kenett, R. S., & Shafrir, U. (2010). **The evidence based management of learning: Diagnosis and development of conceptual thinking with meaning equivalence reusable learning objects** (MERLO). In C. Reading (Ed.), *Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics* (ICOTS). Ljubljana, Slovenia.

Etkind, M., & Shafrir, U. (2013). **Teaching and learning in the digital age with pedagogy for conceptual thinking and peer cooperation**. In L. Gómez Chova, A. López Martínez, & I. Candel Torres (Eds.), *Proceedings of 7th International Technology, Education and Development Conference (INTED)* (pp. 5342-5352). Valencia, Spain.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. Dordrecht: D. Reidel.

Husserl, E. (1931). *Ideas: General introduction to pure phenomenology* (trans. W. R. Boyce Gibson). New York: Macmillan.

Robotti & C. Sabena (Eds.), *Proceedings of the 67th Conference of the Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques*. Aosta, Italy.

Roth, W. M. (2001). Situating cognition. *The Journal of the Learning Sciences, 10*(1-2), 27-61. doi: 10.1207/S15327809JLS10-1-2_4

Sfard, A. (2000). **Symbolizing mathematical reality into being: How mathematical discourse and mathematical objects create each other**. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating: Perspectives on mathematical discourse, tools, and instructional design* (pp. 37-98). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Shafrir, U., & Etkind, M. (2006). E-learning for depth in the semantic web. *British Journal for Educational Technology, 37*(3), 425-444. doi: 10.1111/j.1467-8535.2006.00614.x

Vygotsky, L. (1934). *Pensiero e linguaggio*. Roma: Laterza.

Watkins, J., & Mazur, E. (2013). Retaining students in science, technology, engineering, and mathematics (STEM) majors. *Journal of College Science Teaching, 42*(5), 36-41.

Johnson-Laird, P. N. (1983). *Mental models: Towards a cognitive science of language, inference, and consciousness*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Kellman, P., Massey, C., & Son, J. (2010). **Perceptual learning modules in mathematics: Enchaning student´s pattern recognition, structure extraction, and fluency**. *Topics in Cognitive Science, 2*(2), 285-305. doi: 10.1111/j.1756-8765.2009.01053.x

Kilpatrick, J., Hoyles, C., & Skovsmose, O. (Eds.). (2005). *Meaning in mathematics education*. Springer: New York, NY.

Leung, F.K.S., Graf, K., & Lopez-Real, F. (Eds.). (2006). *Mathematics education in different cultural traditions: A comparative study of East Asia and the West: The 13th ICMI study*. New York: Springer.

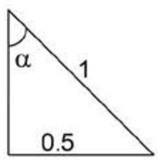
Levinas, E. (1989). *The Levinas reader* (Sean Hand, Ed.). Oxford, UK: Blackwell.

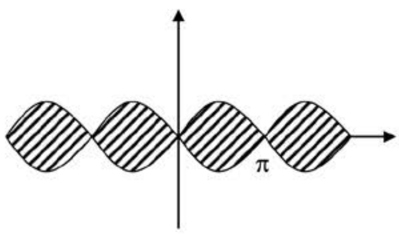
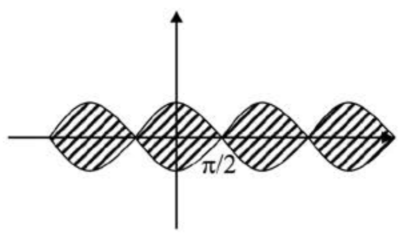
Radford, L. (2010). The eye as a theoretician: Seeing structures in generalizing activities. *For the Learning of Mathematics, 30*(2), 2-7.

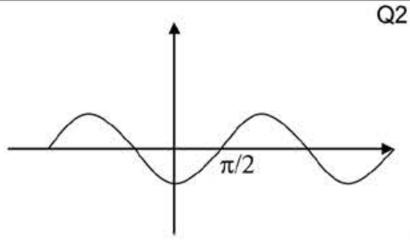
Robutti, O. (2015). Mathematics teacher education in the institutions: New frontiers and challenges from research. In E.

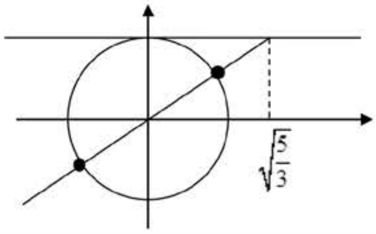
נספח

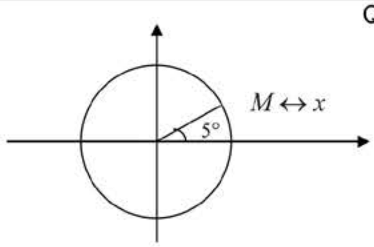
Topic: Elementary trigonometric equations	T $x=-\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$	Q2 Sine of x is equal to (-1/2).
Q2 x is either equal to -30° accurate to $2\pi k$ or equal to -150° accurate to $2\pi k$	Q3 $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k$	Q3 $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Topic: Reduction formulas	T $x=\frac{\sin 1^{\circ}\cdot\sin 2^{\circ}\cdot\ldots\sin 90^{\circ}}{\sin 91^{\circ}\cdot\sin 92^{\circ}\cdot\ldots\sin 179^{\circ}}$	Q2 x is equal to 1
Q2  $x=2\sin\alpha$	Q3 $x=\frac{\sin 1^{\circ}\cdot\sin 2^{\circ}\cdot\ldots\sin 45^{\circ}}{\cos 46^{\circ}\cdot\cos 47^{\circ}\cdot\ldots\cos 89^{\circ}}$	Q3 $x=ctg1^{\circ}\cdot\ldots\cdot ctg179^{\circ}$

Topic: Set of points in the plane, which are concerned with trigonometric functions	T 	Q2 M – is a set of points, which are the middles of segments with the ends belonging to a sine graph
Q2 $x=(a,b)\in M \Leftrightarrow \exists x_1,x_2:$ $a=\frac{x_1+x_2}{2};b=\frac{\sin x_1+\sin x_2}{2}$	Q3 	Q4 M – is a set of points with coordinates (a,b), such that equation $b\sin x=\cos a$ is solvable

Topic: Graphs and reduction formulas	T A graph of a function is symmetric in abscissa axis with respect to a cosines graph	Q2 
Q2 $y=\sin(x+3\pi/2)$	Q4 $y=\sin(x-3\pi/2)$	Q4 $y=\sin(-x)$

Topic: Relations between trigonometric functions	T $tg\alpha=\sqrt{\frac{3}{5}}$	Q2 
Q3 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	Q3 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$	Q4 Modulus of sine is equal to $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

Topic: Radian measure of angle	T Angle x is equal to 5°	Q2 $x=\frac{\pi}{36}$
Q3 There exists an integer k such that $x=5+2\pi k$	Q4 $x=5$	Q4 

Topic: Functions of a half argument	T Cosine of an angle α is equal to $-\frac{3}{5}$	Q2 $\lvert tg\frac{\alpha}{2}\rvert=2$
Q3 odulus of cosine of an angle α is equal to $\frac{3}{5}$.	Q4 $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\sqrt{5}}$	Q4 $tg\frac{\alpha}{2}=2$

Topic: Sign of trigonometric functions	T x belongs to the third quadrant	Q2 $x=10$
Q2 $x=-95^{\circ}$	Q2 $\sin x<0, \cos x<0.$	Q3 Tangent x is positive

Topic: Definition of sine and cosine	T $\sin x=t$	Q2 The ordinate of a point corresponding to number x is equal to t
Q2 The ordinate of a point corresponding to number $x-\pi$ is equal to -t	Q2 If the ordinate of a point corresponding to number y is equal to t, then there exists an integer k such that $y=x+360^{\circ}\cdot k$.	Q3 $\cos x=\sqrt{1-t^2}$