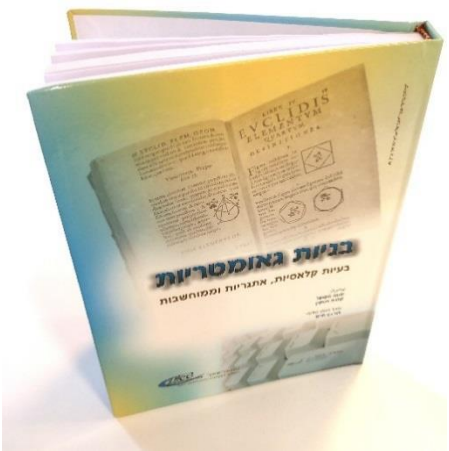
מדור המלצה על ספר

בניות גאומטריות: בעיות קלאסיות, אתגריות וממוחשבות

אילנה לבנברג, האקדמית גורדון, חיפה

על הספר

הספר "בניות גאומטריות" יצא לאור בשלהי תשע"ה, בהוצאת שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך בחיפה. עורכי הספר הם פרופ' משה סטופל וגב' קלרה זיסקינד עם פרופ' דוד בן חיים שהיה גם היועץ המדעי. בזכות יזמתם התעשרנו באחד הספרים המיוחדים ללומדי הגאומטריה ולאוהביה. בפתח הספר יש שלוש חוות דעת של בכירי המתמטיקאים, פרופ' דניאל הרשקוביץ, פרופ' שלמה וינר וד"ר אבי סיגלר. כל השלושה, בשפתם המיוחדת, משבחים את תוכני הספר ואת חשיבותו הן ללומדים והן למלמדים גאומטריה.



נושא הבניות ההנדסיות נעלם מתכנית הלימודים ומבחינת הבגרות עוד בשנות התשעים של המאה הקודמת, אך הוא שב בשנים האחרונות אט-אט ותופס את מקומו החשוב בלימודי הגאומטריה.

כל העוסקים בהוראת המקצוע, מבית הספר התיכון ועד למוסדות להשכלה הגבוהה, יודעים ומכירים בחשיבות הנושא של בניות הנדסיות ומברכים על שובו לתכנית הלימודים. בעיות בנייה אינן רק אתגר ללומד, הן כוללות בתוכן גם חקירה ולפתרונן נדרש ידע והבנה של משפטים והוכחות. המורכבות של נושא הבניות היה ידוע כבר לאבותיה הראשונים של הגאומטריה, וגם הם ראו בנושא זה אתגר מחשבתי ומקור לפיתוח החשיבה הלוגית.

נושאי הספר ותכניו

הספר כולל תשעה פרקים ולמעשה מוביל אותנו מן הקל אל הכבד בנושא הבניות ההנדסיות. הפרק הראשון עוסק בבניות באמצעות סרגל ומחוגה, ויש בו הצגה של בניות יסוד, וכן בניות יסודיות מתקדמות שמספקות את המסד החשוב ביותר לצורך ההתקדמות לשלבים הבאים.

הפרק השני מוליך אותנו אל האתגר של בניות מתוך שימוש בכלי שרטוט אחד מתוך השניים, כלומר באמצעות מחוגה בלבד או באמצעות סרגל בלבד. פרופ' סטופל מציג בפרק זה בניות עם מחוגה בלבד, בהתבסס על דברי מסקרוני

האיטלקי משנת 1797, כי: "כל בעיה שאפשר לבנות באמצעות סרגל ומחוגה אפשר לבנות גם באמצעות מחוגה בלבד". בהמשך, על סמך פונסלה הצרפתי וההוכחה של שטיינר השוויצרי: "שכל הבניות ניתנות לביצוע באמצעות סרגל ומחוגה ניתנות לביצוע גם באמצעות סרגל בלבד, בתנאי שבמישור השרטוט נתון לפחות מעגל אחד שמרכזו מסומן", מוצגות בניות עם סרגל בלבד. ההגבלה לכלי שרטוט אחד הופכת כל בנייה לאתגר מחשבתי וביצועי מורכב הדורש יישום ושילוב מושכל של משפטים והבנה עמוקה של הבנייה ההנדסית.

הפרק השלישי של פרופ' דוד בן-חיים עוסק בקשר בין בניות לממוצעים מתמטיים. זהו הפרק המציג את הקשר החשוב כל כך בין הידע של מושג "ממוצע" וביטויו האלגברי לייצוג הגאומטרי שלו. בפרק זה נוכל למצוא את שלושת הממוצעים: החשבוני, ההנדסי וההרמוני, וכן הוכחות שונות לסדר הגודל ביניהם. תחילה מודגם סדר זה בעזרת הוכחה אלגברית, אחר כך בעזרת חשבון דיפרנציאלי וכמובן גם בדרך גאומטרית. פרופ' דוד בן-חיים מדגים את האפשרויות המגוונות להצגתו של מושג אלגברי ואת השילוב המופלא בין תחומיה השונים של המתמטיקה.

הפרק הרביעי של ד"ר דוד פרייברט עוסק בפתרון משוואות באמצעות סרגל מידה ומחוגה. בפתח הדברים מוזכר ההיבט ההיסטורי של פתרון משוואות ריבועיות עוד אצל היוונים. מאחר שההתמקדות בהוראת המשוואות הריבועיות היא בעיקר בנוסחה האלגברית או בייצוג הגרפי, יש חשיבות רבה ביותר גם לכל אותם הייצוגים הגאומטריים שבדרך כלל לא זוכים לחשיפה. כמו למשל הקשר בין מקדמיה של משוואה ריבועית לבעיית בנייה, שבה יש לבנות מלבן שהיקפו נתון ושטחו שווה לשטח ריבוע (עמ' 93).

הפרק החמישי והגדול בהיקפו מחזיר אותנו לשלוש הבעיות הקלסיות של העולם העתיק, שעמן התמודדו מתמטיקאים למעלה מ-3000 שנה. את הפרק כתב ברוסית מר ויקטור פרסולוב ותרגמה אותו גב' קלרה זיסקינד. ארבעת חלקיו של פרק זה מציגים את "הכפלת הקובייה", "חלוקת זווית לשלושה חלקים שווים" ו"תרבוע העיגול". פרט לסקירה ההיסטורית הרחבה מוצגות לפני הקוראים גם ההוכחות השונות שנכתבו לאורך הדורות. כמו למשל, במאה הרביעית לפנה"ס על ידי מניכמוס ואפולטון, וגם מתמטיקאים במאות הראשונות לאחר הספירה. הבניות המגוונות והעשירות בכל שלוש הבעיות, בהצגת הרקע ההיסטורי, מביאות את הקוראים לידי עושר מחשבתי ויצירתי של גדולי המתמטיקאים מהתקופות השונות וממקומות אחרים בעולם. לדוגמה, בנייתו של עיגול השווה בשטחו לריבוע מתואר כבר בספר הודי עתיק המוקדש לבניית מזבחים בשם "שולבה סוטרא" והבנייה המוצגת שם מספקת קירוב טוב לפתרון הבעיה. את הפרק הזה סוגר החלק הרביעי הדן באי-הפתירות של שלוש הבעיות, באמצעות מחוגה וסרגל. כמו כן, נעשית ההבחנה בין הסיבות לאי-הפתירות של שתי הבעיות "הכפלת הקובייה" ו"חלוקת הזווית לשלושה חלקים שווים", לאי-הפתירות של הבעיה השלישית "תרבוע העיגול" (עמ' 192).

הפרק השישי שכתבה גב' קלרה זיסקינד – טרילוגיה עתיקה בעקבות ספרו של ויקטור פרסולוב – מכוון כולו בבעיה של חלוקת זווית לשלושה חלקים שווים. וזאת מתוך הצגת פתרונות שונים עם "הקלות" מסוימות. לדוגמה, סרגל שעליו מסומנת מידה מסוימת (על פי היפוקרטס במאה החמישית לפנה"ס) או שימוש במכשירים מכניים שונים, שהולבשו על מחוגה ונקראים "טריסקטורים" (מחלק זווית לשלושה חלקים שווים) כמו של הרמס

(Hermes) ב-1883. פרק זה מציג נדבך היסטורי וגאומטרי נוסף, בחיפוש שנמשך לאורך הדורות אחר הפתרון לבעיה העתיקה.

בפרק השביעי מציגה גב' קלרה זיסקינד סקירה היסטורית של בניית מצולעים משוכללים. החל בידע שכבר היה בתקופה היוונית לבנייתם של מצולעים שמתקבלים מהכפלה של מספר צלעות של מצולע משוכלל אחר, וכלה בתגליתו של גאוס לבניית מצולע משוכלל בן 17 צלעות. הוכחה ניצחת להיכרות עם בניית מצולעים משוכללים יש לנו בכל האורנמנטים בתקופות השונות.

בפרק השמיני קופצים ד"ר רות סגל וד"ר יניב ביטון למאה העשרים ואחת ומציגים שימוש בטכנולוגיה ממוחשבת לביצוע בניות גאומטריות. חזרתן של הבניות ההנדסיות לתכנית הלימודים בחטיבת הביניים הביאה עמה גם את הקדמה, בעזרת שילובן של תכנות דינמיות שונות. אלה מאפשרות ליצור קשר בין מניפולציות אלגבריות לייצוגים גאומטריים. בפרק זה יש אחת-עשרה משימות בנייה, כמו למשל המשימה השמינית העוסקת בביצוע חלוקת משולש לשני חלקים שווי היקף ושווי שטח. משימה זו מביאה את הלומדים גם לידי העמקה בתכנים אלגבריים, וכן מציגה את הערך המוסף שיש לכלי הטכנולוגי בחיפוש אחר דרכים לביצוע הבנייה והצדקת נכונותה.

בפרק התשיעי, בפרק האחרון של הספר, מציגים פרופ' משה סטופל ופרופ' דוד בן-חיים יישום מרהיב של משפט שטיינר לטרפז ומתמקדים, בעקבות שטיינר, בבניות שונות באמצעות סרגל בלבד. כמו כן, הכותבים מדגישים את חשיבותן של בניות הנדסיות הן מן ההיבט ההיסטורי והן מן ההיבט ההוראתי בבתי ספר העל-יסודיים ובמוסדות להכשרת מורים. כעורכים, הם מציינים את תפקידה החשוב של הטכנולוגיה בהוראת הנושא, הן ככלי ויזואלי המסייע להבנתם של משפטים והן ככלי לביצוע פעילויות חקר שונות.

לסיכום

הספר מציג תוכני ידע מגוונים בנושא הבניות בגאומטריה, מתוך שילוב ישן וחדש יחדיו. הכותבים והעורכים הפכו נושא קשה ובלתי נגיש ללומדים רבים, למודגם, מוסבר ו"בנוי" בבהירות ועם הוכחות מוצקות. כל אחד מפרקי הספר מכיל תוכני ידע ורעיונות דידקטיים נהדרים, שהמלמדים במוסדות השונים יוכלו ליישמם ולבצעם הלכה למעשה.

בנימה אישית, במסעי הארוך לתוך מאות הבניות המוצגות בספר מרתק זה, לקחתי לתשומת לבי את החשיבות שיש להצגת הבניות המגוונות ש"מאירות" את תכניה של האלגברה. הכוונה לאותה האלגברה הנלמדת כמנותקת מן הייצוג הגאומטרי. הבניות הגאומטריות הן "הגשר" המתאים והנכון ליצירת קשר זה.

ד"ר אילנה לבנברג

ראשת התכנית לתואר מוסמך בהוראה (M.Teach) במכללה האקדמית "גורדון" בחיפה ומרצה בכירה למתמטיקה ולחינוך מתמטי. תחומי מחקריה העיקריים הם בנושאים הקשורים להכשרת מורים למתמטיקה, להוראת גאומטריה ולבחינות הבגרות במתמטיקה.