

מדור חדשות מתמטיות

נצה טובשוביץ-הדר

הידעתם? בשנים האחרונות, בכל שנה מתווספים למעלה מ-100,000 פריטים המתפרסמים בכ-1800 כתבי-עת מתמטיים למאגר המידע הבינלאומי המנוהל על-ידי החברה המתמטית האמריקאית: *MathSciNet* – AMS database of reviews, abstracts and bibliographic info. רוב הפריטים מכילים תוצאות חדשות בענפי המתמטיקה השונים. מדור החדשות בגיליון זה מכיל ארבע חדשות מהשנה הנוכחית (2016), שהן כמובן רק חלק קטנטן של המתרחש במתמטיקה השכם והערב.

ריצוף חדש במחומשים 1

ב-11.8.2015 התפרסמה במדור המדעי של העיתון הבריטי *The Gardien* ידיעה בשם "Attack-on-the-pentagon-results-in-discovery-of-new-mathematical-tile"².

זהו משחק מילים מתוחכם (שלא ניתן לתרגמו לעברית) המיועד למשוך את קוראי העיתון הבריטיים לסנסציה הנוגעת, כביכול, למתקפה על הפנטגון בווישינגטון, על מנת שיקראו באותה הזדמנות על חדשה מתמטית הנוגעת לריצוף במחומשים...

מה זה בעצם ריצוף?

ריצוף, או הנחת אריחים (שוויים או שונים) זה לצד זה ללא רווחים וללא חפיפה כלשהי, הוא נושא מרתק.

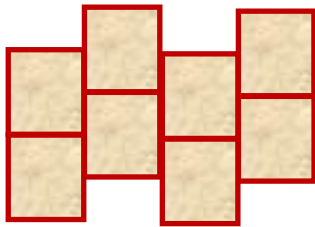
הריצוף הפשוט והמוכר ביותר שהיה מקובל בבתי



איור 1

1. תודתי נתונה לגלעד דיאמנט, הייטקיט, בעל תואר בפיזיקה ומדעי המחשב ומחבר הספר "חשיבה חדה", על תרומתו להכנת חלק זה של המדור במהלך הכנת הבוק חדשות להטיבה העליונה במסגרת פרויקט ההבזקים של "קשר חם".
2. Bellos, A. (2015, August 11). Attack on the pentagon results in discovery of new mathematical tile. *The guardian*. Retrieved from <https://www.theguardian.com/science/alex-adventures-in-numberland/2015/aug/10/attack-on-the-pentagon-results-in-discovery-of-new-mathematical-tile>

מגורים בישראל עד לתקופה האחרונה הוא ריצוף באריחי מוזאיקה ריבועיים חופפים זה לזה שמידת הצלע שלהם היא 20 ס"מ, כך שהם מונחים קדקוד אל קדקוד וצלע אל צלע (בקיצור ק.צ.צ.).

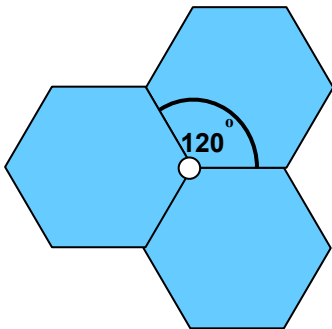


איור 2

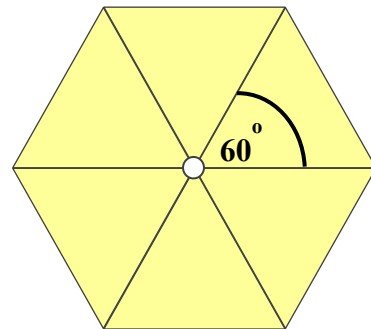
בשנים האחרונות מציעים יצרני האריחים עוד ועוד סוגים של ריצופים ריבועיים, אך הם נבדלים זה מזה רק בגודלו של האריח ובחומר ממנו הוא עשוי. לעתים מניחים אותם לא בשיטת ק.צ.צ. אלא למשל כך: העיקרון המתמטי של ריצוף מונו-הדרלי (כלומר באריח יוצר אחד) בשיטת ק.צ.צ., הוא שבכל קדקוד נפגשים אריחים חופפים אחדים, כך שסכום הזוויות סביב כל קדקוד משותף הוא 360 מעלות.

באילו אריחים ניתן לרצף?

היות והזווית הפנימית של משולש שווה צלעות היא בת 60 מעלות, משולש כזה יכול להיות "אריח יוצר" לריצוף פשוט על-ידי שישה משולשים חופפים כאלה שנפגשים בכל קדקוד (ראו איור 3). גם משושה משוכלל יכול להיות אריח יוצר לריצוף פשוט, שכן הזווית הפנימית של משושה משוכלל היא בת 120 מעלות ושלושה משושים משוכללים חופפים שנפגשים בקדקוד עומדים בתנאי ההכרחי והמספיק לריצוף (ראו איור 4).

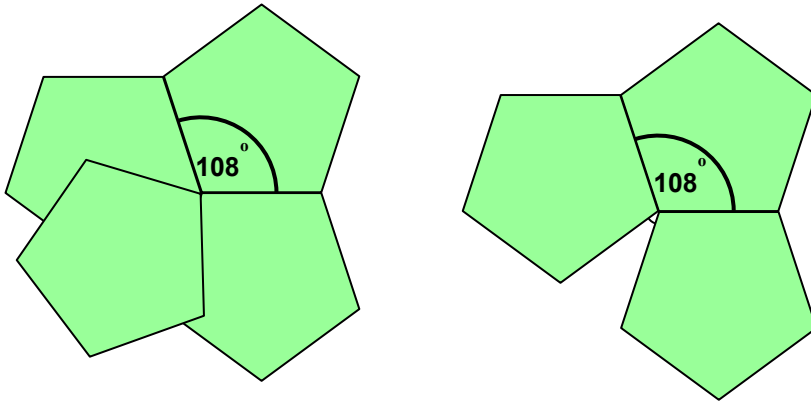


איור 4: שלושה משושים שווים צלעות הנפגשים בקדקוד משותף יוצרים ריצוף



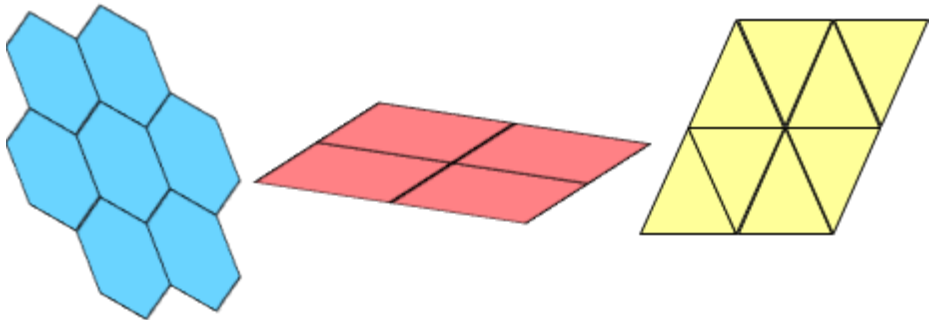
איור 3: שישה משולשים שווים צלעות הנפגשים בקדקוד משותף יוצרים ריצוף

אבל אי אפשר לרצף את המישור באריח יוצר בצורת מצולע משוכלל בעל 5 צלעות או 7 צלעות ומעלה, כיוון שהמספר המינימלי של מצולעים הנפגשים בקדקוד אחד לצורך ריצוף הוא שלושה, והחשבון מראה ששלושה מחומשים הנפגשים בקדקוד מותירים רווח (כי סכום הזוויות הוא 324 מעלות), ולארבעה אין די מקום סביב קדקוד משותף (סכום הזוויות 432 מעלות, ראו איור 5). באשר למשובעים ומעלה גם שלושה הם יותר מדי.



איור 5: שלושה מחומשים משוכללים או ארבעה שנפגשים בקדקוד משותף אינם יוצרים ריצוף

השאלה שעולה באורח טבעי טבעי טבעי היא האם יש אפשרות לרצף את המישור באריח יוצר קמור שאינו משוכלל? אם מבצעים טרנספורמציה של מתיחה-כיווץ או סיבוב על ריצוף מונו-הדרלי במשולשים שווי צלעות, בריבועים, או במשולשים משוכללים, קל לראות שהסרת האילוץ של היות האריח היוצר משוכלל משאירה עדיין אפשרויות רבות לריצוף מונו-הדרלי במצולעים כאלה שאינם משוכללים (ראו דוגמה באיור 6).



איור 6: ריצוף במשולשים, מרובעים ומשולשים שאינם משוכללים

יתרה מזו, כל משולש יכול לשמש לריצוף מונו-הדרלי כי סכום הזוויות במשולש הוא 180° , והנחת משולשים זהים באופן הולם בקדקוד אחד יכולה לתת סכום של 360° סביב כל קדקוד. גם כל מרובע יכול לשמש כאריח יוצר מפני שסכום הזוויות במרובע הוא 360° והנחת מרובעים בקדקוד באופן הולם נותנת את הנדרש לריצוף. משולשים לא משוכללים הם קצת יותר בעייתיים. מתברר שיש רק שלושה משולשים לא משוכללים שונים שבכל אחד מהם ניתן לרצף את המישור (לקבלת מידע מפורט, כדאי להפעיל את ההדגמה בגאוגברה כאן: <http://tube.geogebra.org/student/m155779>).

את קיומם של שלושה טיפוסים נוספים של מחומשים שבעזרת כל אחד מהם ניתן לרצף את המישור. מרטין גרדנר כתב במדור הקבוע שלו בעיתון סיינטיפיק אמריקן בשנת 1975 תיאור של כל שמונה הסוגים מתוך הנחה שזוהי הרשימה המלאה, אבל קיבל הודעה מחובב שכינה את עצמו בשם ריצ'רד ג'יימס השלישי, שהוא מצא עוד טיפוס שלא כלול ביניהם. עוד בטרם יבשה הדיו מעל העדכון שפרסם גרדנר לקוראיו, הוא קיבל הודעה ממרג'ורי רייס, עקרת בית בעלת רקע מתמטי של בוגרת תיכון אך חובבת המקצוע, שגילתה עוד ארבעה סוגים. בשנת 1985 מצא רולף סטיין עוד מחומש קמור שיכול לרצף את המישור. 30 שנה עברו ונראה היה שזוהי זה יש 14 טיפוסים ולא יותר. ואז למרבית ההפתעה, התגלה בקיץ 2015 טיפוס מספר 15 על-ידי שלושה אנשים: קייסי מן, ג'ניפר מקלאוד ודוד ון-דרו. אפשר למצוא את ההדגמות של כל 15 הסוגים אצל פג.⁵ ולגמרי לא ברור שהרשימה כבר מלאה! ואפילו לא ברור שיש רק מספר סופי של ריצופים במחומשים.

האם אתם מזהים את הריצוף בכניסה לבית האיגוד האמריקני למתמטי?

משהו חדש על התנהגותם של המספרים הראשוניים ועוד חדשה פחות מפתיעה

מבין כל התכונות המפתיעות של המספרים הראשוניים, זאת שעושה אותם לשימושיים להצפנה, היא העובדה שאין קושי ליצור מכפלה של שני ראשוניים ולו גם גדולים מאוד ולקבל מספר פריק גדול מאוד, אבל קשה עד מאוד ובעצם בלתי אפשרי בזמן סביר, לפרק לגורמים מספר גדול מאוד שהוא מכפלה של שני ראשוניים גדולים. החיפוש אחר מספרים ראשוניים גדולים (שקיומם לבלי סוף הוכח מזמן, עוד על-ידי אוקלידס), קיבל מאז התגלית על יישומם להצפנה חשיבות מעל ומעבר לסיפוק הסקרנות של מתמטיקאים. המספר הראשוני הגדול ביותר שהתגלה עד מועד כתיבת שורות אלו הוא $1 - 2^{74,207,281}$ שהתגלה בינואר 2016 והוא בן 22,338,618 ספרות (להרחבה ראו מדור חדשות מתמטיות בגיליון 1 של כתב עת זה).

תדירות הופעתם של מספרים ראשוניים על פני ציר המספרים הממשי מוזרה ומעוררת תמיהה. מצד אחד אפשר לאתר מרווחים גדולים כרצוננו שאין בהם אף לא מספר ראשוני אחד, ומצד שני, תלויה ועומדת השערת המספרים התאומים שמן הסתם תוכח ביום מן הימים, לפיה אין סוף למספרים ראשוניים שהפרש ביניהם הוא 2 (עד היום, יש הוכחה להפרש סופי יותר גדול, שצמצומו ל-2 הוא האתגר).⁶

5. Pegg, E. Jr. (2009, May 13). Pentagon tilings. *Wolfram Demonstrations Project*. Retrieved from <http://demonstrations.wolfram.com/PentagonTilings>

6. Wikipedia (2016). *Twin prime*. Retrieved from https://en.wikipedia.org/wiki/Twin_prime

לא קיימת נוסחה שמפיקה אך ורק מספרים ראשוניים ותדירות הופעתם של המספרים הראשוניים נראית כאילו היא רנדומלית. האומנם?! שני חוקרים מאוניברסיטת סטנפורד, רוברט אוליבר וקאנאן סאנדראראין, פרסמו בחודש מרץ 2016, כתבה בשם: 'הטיה בלתי צפויה בהתפלגות של מספרים ראשוניים עוקבים'.⁷ כידוע, בהיותם אי-זוגיים (למעט 2) ולא מתחלקים ב-5 (למעט 5), המספרים הראשוניים פרט ל-2 ול-5 מסתיימים כולם באחת מארבע הספרות 1, 3, 7, 9. לכן, אילו הם היו מפוזרים באופן אקראי על פני ציר המספרים, אזי מספר ראשוני שמופיע מיד אחרי מספר ראשוני קטן ממנו המסתיים ב-1, היה גם הוא מסתיים ב-1 ב-25% מהמקרים. במילים אחרות, שני מספרים ראשוניים עוקבים היו מסתיימים בספרה 1, באחד ל-4 מקרים. אולם להפתעתם, שני החוקרים שבדקו את ביליון (1000 מיליון) המספרים הראשוניים הראשונים, מצאו שהראשוני הבא אחרי מספר ראשוני שמסתיים ב-1, מסתיים גם הוא ב-1 רק בכ-18% מהמקרים (כלומר בערך באחד מחמישה מקרים) ואילו ב-3 או ב-7 – בכ-30% מהמקרים וב-9 בכ-22% מהמקרים. אותו דבר נכון למספר ראשוני שמסתיים ב-3, 7, או 9, אבל בהטיה מעט קטנה יותר. כאמור, הכתבה פורסמה בכמה שבה מתמטיקאים מפרסמים תוצאות שהם מעמידים לידיעת עמיתיהם לבדיקה לפני שהם שולחים אותן לפרסום בעיתונות המקצועית. אבל מתברר שמתמטיקאים רבים עטו על הרעיון ובודקים עוד ועוד מקרים. לא ברור אם לממצאים האלה עשויים להיות שימושים או השלכות על ההצפנה המודרנית, אבל הסקרנות בוערת במתמטיקאים ויש להניח שלא יעבור זמן רב עד שהדברים יתבררו.⁸

סוף סוף פרס לאנדרו וויילס על הוכחת השערת פרמה

אנדרו וויילס היה ילד בן עשר כשגילה (בשנת 1963) שמאות בשנים תלויה ועומדת השערה מתמטית פשוטה וקלה להבנה, שאף לא אחד מהמתמטיקאים יכול להוכיח ואף לא להפריך אותה, והבטיח לעצמו – אני אגדל להיות מתמטיקאי ואוכיח אותה. הוא אכן גדל להיות מתמטיקאי ואף הוכיח שלא קיים פתרון שלם $2 < x^n + y^n = z^n$ למשוואה $x^n + y^n = z^n$ עבור x, y, z ממשיים. הוכחת ההשערה, שנודעה במשך כ-400 שנה בשם "המשפט האחרון של פרמה", אף כי פרמה לא השאיר הוכחה לכך, לא זיכתה את אנדרו וויילס במדליית פילדס היוקרתית, מפני שזו ניתנת למתמטיקאי שהישגיו הוכרו לפני שמלאו לו 40 שנה. אבל אנדרו היה בן 41 כשהצליח לתקן את הטעות האחרונה שהתגלתה בהוכחה שלו, וזה היה בשנת 1994.

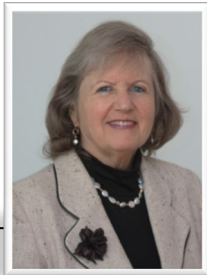
יום לאחר יום הפאי של שנת 2016 התבררנו כי הזוכה בפרס אבל (Abel), הפרס הנחשב לפרס נובל של המתמטיקה לשנת 2016, הוא אנדרו וויילס.⁹ אנדרו וויילס התמיד בעבודתו על פתרון הבעיה

7. Oliver, R. J. L., & Soundararajan, K. (2016, May 30). *Unexpected biases in the distribution of consecutive primes*. Retrieved from <http://web.stanford.edu/~rjlo/papers/16-primebias.pdf>

8. Rathi, A. (2016, March 15). *Mathematicians are geeking out about a bizarre discovery in prime numbers*. Retrieved from <http://qz.com/639452/mathematicians-are-geeking-out-about-a-bizarre-discovery-in-prime-numbers/>

9. Fermat's last theorem mathematician Andrew Wiles wins Abel prize. (2016, March 15). *New Scientist*. Retrieved from <https://www.newscientist.com/article/2080689-fermats-last-theorem-mathematician-andrew-wiles-wins-abel-prize/>

שנים רבות (חלק ניכר במסתרים!) שלא על מנת לקבל פרס, כמובן, אבל כל הקהילייה המתמטית התרגשה יחד אתו מהידעה על זכייתו. על האירוע ב-24.5.2016 באוסלו תוכלו לקרוא כאן: <http://www.abelprize.no/seksjon/vis.html?tid=67109>



פרופ' (אמריטוס) נצה מובשוביץ-הדר

הקימה בשנת 1977 את "קשר חם" - מרכז מו"פ לקידום שיפור וריענון החינוך המתמטי ומנהלת אותו מאז. עמדה בראש המחלקה להוראת המדעים בטכניון - מכון טכנולוגי לישראל, ניהלה את המוזיאון הלאומי למדע בחיפה, הנהיגה צוותי כתיבה של תכניות לימודים חדשניות, ביניהן סדרת המשדרים הדרמטיים "חשבון פשוט" שהופקה על-ידי הטלוויזיה החינוכית וזכתה לפרסים בינלאומיים. פרופ' מובשוביץ-הדר פרסמה מאמרים רבים ושני ספרים, והעמידה דור של מורים למתמטיקה ותלמידי מחקר חדורים בשאיפה לקרב את המתמטיקה אל לבו של הנוער. בשנים האחרונות היא נהנית מסתן סדרת הרצאות במתמטיקה לציבור הרחב לצד המשך עשייה בתחום המחקר והפיתוח של רעיונות חדשניים לקידום החינוך המתמטי.